MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **29 GENNAIO 2008**

ECONOMIA AZIENDALE

<u>ESERCIZIO 1</u>

Una società vuole acquistare un terreno il cui costo è pari a 160000 Euro. Parte del costo viene ricavato attraverso l'emissione sul mercato di 50 titoli a cedola fissa (TCF) ognuno dei quali ha un valore facciale pari a 2200 Euro, cedola semestrale, scadenza 2 anni, tasso nominale annuo del 4% e riconosce un tir del 5% annuo. Per la parte rimanente la società decide di accedere ad un mutuo al tasso del 3% annuo caratterizzato da rate mensili costanti posticipate. Supponendo che la società non possa pagare una rata mensile superiore a 12000 Euro, si determini:

1. **il numero di versamenti effettuati dalla società per estinguere il mutuo ed il relativo importo;**

Indichiamo con S il valore del terreno $\Rightarrow$ $S = 1600000$
Per poter conoscere l'ammontare che la società ha finanziato con il mutuo è necessario dapprima calcolare la parte di costo coperta dai 50 TCF:

$C = 2200 \quad i_{nom} = 0.04 \quad T.I.R. = 0.05 \quad$ scadenza 2 anni

Valore della cedola: $I = \dfrac{2200 \cdot 0.04}{2} = 44$

L'operazione finanziaria che descrive ciascun TCF è la seguente:

$$\{44,44,44,2244\}/\{1,2,3,4\}\text{semestri}$$

Calcoliamo,dunque, il valore al tempo t = 0 di un TCF:

$$V(0,TCF) = I \cdot a_{4;i_{1/2}} + C \cdot \left(1+i_{1/2}\right)^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad V(0,TCF) = I \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/2}\right)^{-4}}{i_{1/2}} + C \cdot \left(1+i_{1/2}\right)^{-4}$$

Poiché le cedole sono semestrali, rendiamo il tutto omogeneo dal punto di vista temporale trasformando il tasso da annuale in semestrale secondo la regola dei tassi equivalenti:

$$i_{1/2} = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0.05)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.024695 = 2.4695\%$$

Ritornando al valore del TCF:

$$V(0,TCF) = 44 \cdot \frac{1-(1+0.024695)^{-4}}{0.024695} + 2200 \cdot (1+0.024695)^{-4} = 2161.114$$

Dunque, il valore attuale dei 50 TCF è:

$$V(0,50TCF) = 50 \cdot V(0,TCF) = 50 \cdot 2161.114 = 108055.70$$

La parte di costo finanziata con il mutuo, di cui dobbiamo calcolare il numero di versamenti, è:

$$S' = S - V(0{,}50TCF) = 51944.30$$

Calcoliamo dapprima il tasso su base mensile corrispondente al tasso annuo del 3%:

$$i_{1/12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1+0.03)^{\frac{1}{12}} = 0.002466 = 0.2466\%$$

Tenendo conto che la società non può pagare una rata mensile superiore a 12000€ (R_{MAX}), esprimiamo la somma finanziata con il mutuo nel modo seguente:

$$S' = R_{MAX} \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/12}\right)^{-m}}{i_{1/12}}$$

Da cui, attraverso passaggi matematici, è possibile ottenere "m" come segue:

$$m = -\frac{\log\left[1-\left(S' \cdot i_{1/12}\right)/R_{MAX}\right]}{\log\left(1+i_{1/12}\right)} = -\frac{\log[1-(51944.30 \cdot 0.002466)/12000]}{\log(1+0.002466)} = 4.3573 \text{ mesi}$$

Calcoliamo il valore esatto della rata ponendo m = 5:

$$S' = R \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/12}\right)^{-m}}{i_{1/12}} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{51944.30}{\frac{1-(1+0.002466)^{-5}}{0.002466}} = 10465.84$$

2. il piano d'ammortamento per il rimborso del mutuo contratto.

$R = 10465.84 \qquad v = (1+0.002466)^{-1}$

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	S'
1	R	$C_1 = R \cdot v^5$	$R - C_1$	$D_1 = S' - C_1$
2	R	$C_2 = R \cdot v^4$	$R - C_2$	$D_2 = D_1 - C_2$
3	R	$C_3 = R \cdot v^3$	$R - C_3$	$D_3 = D_2 - C_3$
4	R	$C_4 = R \cdot v^2$	$R - C_4$	$D_4 = D_3 - C_4$
5	R	$C_5 = R \cdot v^1$	$R - C_5$	$D_5 = D_4 - C_5 =$

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	51944.30
1	10465.84	10337.75	128.09	41606.55
2	10465.84	10363.24	102.60	31243.31
3	10465.84	10388.79	77.05	20854.52
4	10465.84	10414.41	51.43	10440.11
5	10465.84	10440.11	25.75	0

ESERCIZIO 2

Un vostro amico vuole investire i suoi risparmi su un mercato dove sono presenti i seguenti titoli:

- **Titolo 1: TCF con valore facciale pari a 1700 Euro, tasso nominale 6%, cedola trimestrale, scadenza 1 anno e prezzo pari a 1650 Euro;**
- **Titolo 2: TCF con valore facciale 2000 Euro, tasso cedolare 1%, cedola annua, scadenza 2 anni e prezzo pari a 1950 Euro.**

A tal fine vi chiede un consiglio su quale titolo investire. Determinare:

1. **in base al criterio del TIR, quale titolo consigliereste al vostro amico (motivare la risposta);**

TCF_1:

C = 1700 i_{nom} = 6% cedole trimestrali scadenza = 1 ANNO P = 1650

Valore cedola: $I = \frac{1700 \cdot 0.06}{4} = 25.5$

L' operazione finanziaria che descrive il TCF è dunque:

$$\{-1650, 25.5, 25.5, 25.5, 1675.5\} / \{0,1,2,3,4\} \text{trimestri}$$

Verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- *P < f(1) → 1650 < 1802 (somma cedole + valore facciale)*

APPLICHIAMO IL METODO DELLE CORDE PERCHÉ SI TRATTA DI RISOLVERE LA SEGUENTE EQUAZIONE:

$$P = I \cdot v \cdot \frac{1 - v^4}{1 - v} + C \cdot v^4$$

I STEP:

Poniamo $f(v) = I \cdot v \cdot \frac{1-v^4}{1-v} + C \cdot v^4$ *e risolviamo tale equazione trovando due valori :*

- v_1 *tale che* $f(v_1) < P$
- v_m *tale che* $f(v_m) > P$

$v_1 = 0.97 \quad f(v_1) = 1599.57 < 1650$
$v_m = 0.98 \quad f(v_m) = 1665.03 > 1650$

I valori attribuiti a v_1 *e* v_m *sono quindi accettabili.*

II STEP:

Determiniamo il valore di v_2 *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

Sostituendo i valori otteniamo $v_2 = 0.9777$

III STEP:

Fissiamo un livello di errore accettabile $\varepsilon = 0.0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$*:*

$f(v_2+\varepsilon) = 1650.456 > P$ *dunque il valore di* v_2 *è accettabile.*

CALCOLIAMO ORA IL T.I.R.:

$i^* = \frac{1}{v_2} - 1 = 0.02281$ *espresso su base trimestrale*

Trasformiamolo su base annua:

$i_1^* = (1 + i_{1/4}^*)^4 - 1 = 0.09441 = 9.441\%$

TCF_2:

C = 2000 $\quad i_{ced} = 1\%$ *cedola annua scadenza = 2 ANNI P = 1950*

Valore cedola: $I = 2000 \cdot 0.01 = 20$

L' operazione finanziaria che descrive il TCF è dunque:

$$\{-1950, 20, 2020\} / \{0,1,2\} \text{anni}$$

Verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- $P < f(1) \rightarrow 1950 < 2040$ *(somma cedole + valore facciale)*

Dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$P = I \cdot v + (I + C) \cdot v^2$$

Si tratta di una semplice equazione di II grado, da cui è possibile ricavare direttamente il T.I.R.:

$$2020 \cdot v^2 + 20 \cdot v - 1950 = 0 \quad \rightarrow \quad v = 0.9776$$

$i^* = \frac{1}{v} - 1 = 0.02293 = 2.293\%$ *su base annua*

Trattandosi di investimento, è più conveniente il TCF_1 *perché paga un interesse annuo più elevato.*

2. **la vita a scadenza e la Duration del titolo consigliato (utilizzando come tasso di interesse il tir);**

vita a scadenza = 4 trimestri

$$D(0, TCF) = \frac{\sum_{K=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$$

nel nostro caso il tasso da considerare è il T.I.R. su base trimestrale del primo TCF

$$D(0, TCF) = \frac{1 \cdot 25.5 \cdot 1.02281^{-1} + 2 \cdot 25.5 \cdot 1.02281^{-2} + 3 \cdot 25.5 \cdot 1.02281^{-3} + 4 \cdot (25.5 + 1700) \cdot 1.02281^{-4}}{1650} = 3.910$$

D(0, TCF) = 3.9110 trimestri = 0.97754 anni

3. **quante quote di un TCN con valore nominale pari a 1000 Euro e scadenza 3 anni, valutato al TIR del titolo prescelto di cui al punto 1., il vostro amico dovrebbe aggiungere ad una singola quota del TCF che gli avete consigliato affinché il Portafoglio così composto abbia una Duration pari a 2.5 anni;**

Con α indichiamo le quote del TCN.
Calcoliamo il prezzo del TCN,ovvero il suo valore al tempo t = 0:

$P = 1000 \cdot (1+0.09441)^{-3} = 762.886$
D(0,TCN) = 3 anni

Consideriamo il portafoglio z = α · TCN + TCF e poniamo la sua duration pari a 2.5 anni:

$$D(0, z) = \frac{\alpha P_{TCN} \cdot D(0, TCN) + P_{TCF} \cdot D(0, TCF)}{\alpha P_{TCN} + P_{TCF}} = 2.5 \quad \text{ANNI}$$

$$D(0, z) = \frac{\alpha 762.886 \cdot 3 + 1650 \cdot 0.97754}{\alpha 762.886 + 1650} = 2.5$$

Attraverso semplici passaggio matematici otteniamo:
α = *6.5872*