MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **13 FEBBRAIO 2008**

ECONOMIA AZIENDALE

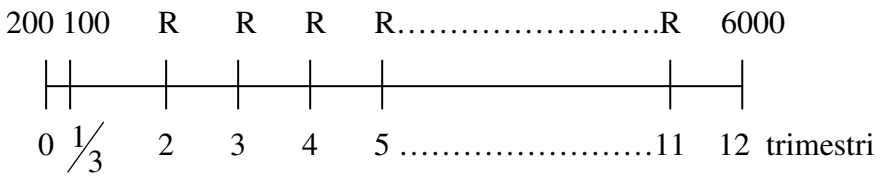
Cognome……..……. Nome ……Matricola……..

ESERCIZIO 1

Un individuo vuole accumulare su un conto corrente la somma di 6.000 Euro al tempo T=3 anni. A tal fine versa: oggi (t_0 = 0) 200 Euro; dopo un mese 100 Euro e, a partire dall'epoca t=1 semestre, 10 rate costanti trimestrali anticipate. Supponendo che il conto corrente riconosca un tasso dell' 1.5% annuo, determinare:

1. **l'importo delle rate trimestrali.**

L'importo di 6000 Euro è il montante dell'operazione finanziaria che descriviamo graficamente di seguito (dove lo scadenzario è espresso in trimestri solo per comodità di calcolo, visto che le rate da determinare sono trimestrali):



Poiché le rate sono trimestrali, rendiamo il tutto omogeneo dal punto di vista temporale trasformando il tasso da annuale in trimestrale secondo la regola dei tassi equivalenti:

$$i_{1/4} = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.015)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.003729$$

$$6000 = 200 \cdot (1+0.015)^3 + 100 \cdot (1+0.003729)^{12-\frac{1}{3}} + R \cdot \frac{1-(1+0.003729)^{-10}}{0.003729} \cdot (1+0.003729) \cdot (1+0.003729)^{10}$$

Da cui, attraverso semplici calcoli matematici, determiniamo R:

R = 557.088

All'epoca T=3 anni, l'individuo decide di acquistare un'automobile il cui prezzo è pari a 30.000 Euro. A tal fine ha la possibilità di versare come anticipo la somma accumulata in precedenza e di coprire la parte restante del costo dell'automobile tramite il versamento di 6 rate quadrimestrali posticipate di importo pari a 5.000 Euro. Determinare:

2. **il tasso a cui avviene l'operazione di compravendita dell'automobile (nei calcoli considerare almeno fino alla quarta cifra decimale).**

L'importo da finanziare è pari a: 30000 – 6000 = 24000
Per cui:

$$24000 = 5000 \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/3}\right)^{-6}}{i_{1/3}}$$ *che possiamo riscrivere nel seguente modo:*

$$24000 = 5000 \cdot v \cdot \frac{1-v^6}{1-v}$$

Si tratta, dunque, di calcolare il T.I.R. di questa operazione finanziaria tramite il metodo delle corde. Innanzitutto verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- *P < f(1)* $\rightarrow$ 24000 < 30000

I STEP:

Poniamo $f(v) = 5000 \cdot v \cdot \frac{1-v^6}{1-v}$ *e risolviamo tale equazione trovando due valori :*

- v_1 tale che $f(v_1) < P$
- v_m tale che $f(v_m) > P$

$v_1 = 0.93$ $f(v_1) = 23449.93781 < 24000$
$v_m = 0.94$ $f(v_m) = 24293.53382 > 24000$

Sono quindi due valori accettabili.

II STEP:

Determiniamo il valore di v_2 *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot \left(v_m - v_1\right)$$

Sostituendo i valori otteniamo $v_2 = 0.9365$

III STEP:

Fissiamo un livello di errore accettabile $\varepsilon = 0.0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

$f(v_2+\varepsilon) = 24003.48692 > P$ *dunque il valore di* v_2 *è accettabile.*

CALCOLIAMO ORA IL T.I.R.:

$$i_{1/3}^{*} = \frac{1}{v_2} - 1 = 0.06778$$

ESERCIZIO 2

In un mercato si possono acquistare all'epoca t=0 due titoli con le seguenti caratteristiche:

- **Titolo 1: TCF emesso alla pari con valore facciale pari a 2.500 Euro, tasso nominale annuo 5%, cedole trimestrali e scadenza a 1 anno;**
- **Titolo 2: Un titolo con Prezzo P pari a 1.950 Euro e che paga due importi, di cui il primo è incognito, indicato con A e pagato all'epoca t=2 bimestri; e il secondo pari a 1.500 Euro e pagato in t=8 bimestri.**

Determinare:

1. **l'importo A tale che i due titoli abbiano lo stesso TIR;**

Soffermiamoci dapprima sul TCF che, essendo quotato alla pari, ha un TIR che coincide con il tasso cedolare:

$$I = \frac{2500 \cdot 0.05}{4} = 31.25$$

$$i_{ced} = \frac{I}{C} = \frac{31.25}{2500} = 0.0125 \quad \Rightarrow \textit{questo è il TIR espresso su base trimestrale}$$

Il secondo titolo è descritto dalla seguente operazione finanziaria:

{-P, A, 1500 }/ {0, 2, 8} *bimestri*

dove P = 1950 e A è l'importo incognito da determinare utilizzando il TIR calcolato per il TCF:

$$1950 = A \cdot \left(1 + i_{1/6}\right)^{-2} + 1500 \cdot \left(1 + i_{1/6}\right)^{-8}$$

dove il tasso su base bimestrale viene ricavato grazie alla regola dei tassi equivalenti:

$$i_{1/6} = \left(1 + i_{1/4}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = (1 + 0.0125)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.008316$$

Attraverso semplici passaggi algebrici otteniamo A:

A = 555.280

2. **le Duration dei due titoli in t=0 utilizzando il TIR del TCF;**

$$D(0, TCF) = \frac{\sum_{K=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$$

$$D(0, TCF) = \frac{1 \cdot 31.25 \cdot 1.0125^{-1} + 2 \cdot 31.25 \cdot 1.0125^{-2} + 3 \cdot 31.25 \cdot 1.0125^{-3} + 4 \cdot (31.25 + 2500) \cdot 1.0125^{-4}}{2500} = 3.926534$$

D(0, TCF) = 3.926534 trimestri = 0.9816335 anni

$$D(0,\text{titolo2}) = \frac{2 \cdot 555.28 \cdot 1.008316^{-2} + 8 \cdot 1500 \cdot 1.008316^{-8}}{1950} = 6.319511$$

D(0, titolo 2) = 6.319511 bimestri = 1.0532518 anni

3. **dopo 1 mese, la Variazione Percentuale del Prezzo del Portafoglio, composto da 2 quote del titolo 1 e 3 quote del titolo 2, a fronte della variazione annua del TIR su base annua pari a Δi =+0,005. Commentare quindi cosa accade al prezzo del portafoglio.**

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(t,z) \cdot \Delta i$$

$$D(t,z) = D(0,z) - t$$

$$D(0,z) = \frac{\alpha P_{TCF} \cdot D(0,TCF) + \beta P_{Titolo\,2} \cdot D(0,Titolo2)}{\alpha P_{TCF} + \beta P_{Titolo\,2}}$$

Dove con α = 2 indichiamo le quote del TCF e con β = 3 indichiamo le quote del titolo 2, e come duration dei due titoli utilizziamo quelle espresse in anni:

$$D(0,z) = 1.020247975 \textit{ anni}$$

$$D(t,z) = 1.020247975 - \frac{1}{12} = 0.936914641$$

Siamo ora in grado di calcolare la variazione percentuale del prezzo del portafoglio, ma prima dobbiamo convertire il TIR del TCF (di cui stiamo prendendo in considerazione la variazione percentuale annua) da base trimestrale a base annuale:

$$i = \left(1 + i_{1/4}\right)^4 - 1 = (1 + 0.0125)^4 - 1 = 0.050945$$

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+0.050945} \cdot 0.936914641 \cdot 0.005 = -0.00445749$$

Dunque a fronte di un aumento del tasso di interesse nella misura dello 0.005% il prezzo del portafoglio è diminuito dello 0.445749%.