MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **08 LUGLIO 2008**

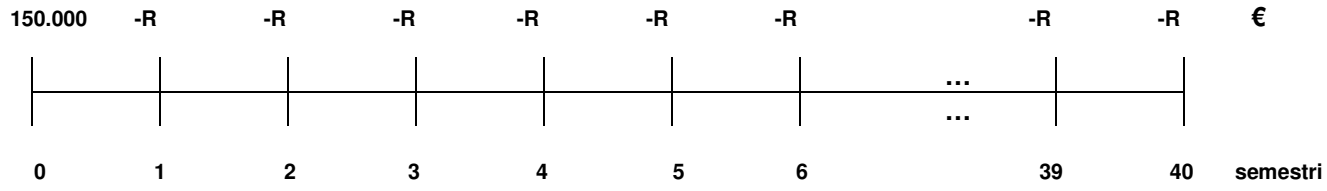
ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

Un individuo desidera acquistare un appartamento che ha un prezzo pari a Euro 150.000. A tal fine contrae un prestito che verrà restituito con rate semestrali costanti posticipate, su un orizzonte temporale di 20 anni utilizzando un tasso di interesse pari al 5% annuo.

1. Redigere il piano di ammortamento per i primi 5 semestri ed indicare la decima quota interessi.

L'operazione finanziaria che descrive il prestito è la seguente:



{150.000, -R, -R, -R, -R, -R, -R, …-R, -R} / {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 39, 40}

Prima di redigere il piano di ammortamento è necessario determinare l'importo della rata R e convertire il tasso annuale in tasso semestrale:

$$i_{sem} = (1+i_{ann})^{1/2} - 1 = 2{,}47\%$$

$$v = (1+i)^{-1} = 0{,}9759\,.$$

L'importo della rata R è così determinato:

$$R \cdot a_{\overline{m}|i} = 150.000 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{150.000 \cdot 0{,}0247}{1 - v^{40}} = 5.944{,}79 \text{ Euro}$$

Da cui si ottiene il seguente piano di ammortamento per 20 anni (40 semestri):

k (semestri)	Rata	C_k	I_k	M_k
0	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**150.000,00**
1	**5.944,79**	**2.240,53**	**3.704,26**	**147.759,47**
2	**5.944,79**	**2.295,86**	**3.648,93**	**145.463,61**
3	**5.944,79**	**2.352,56**	**3.592,24**	**143.111,06**
4	**5.944,79**	**2.410,65**	**3.534,14**	**140.700,40**
5	**5.944,79**	**2.470,18**	**3.474,61**	**138.230,22**
6	5.944,79	2.531,18	3.413,61	135.699,04
7	5.944,79	2.593,69	3.351,10	133.105,34
8	5.944,79	2.657,74	3.287,05	130.447,60
9	5.944,79	2.723,38	3.221,41	127.724,22
10	**5.944,79**	**2.790,63**	**3.154,16**	**124.933,59**
11	5.944,79	2.859,55	3.085,24	122.074,05
12	**5.944,79**	**2.930,16**	**3.014,63**	**119.143,88**
13	5.944,79	3.002,52	2.942,27	116.141,36
14	5.944,79	3.076,67	2.868,12	113.064,69
15	5.944,79	3.152,65	2.792,14	109.912,04
16	5.944,79	3.230,50	2.714,29	106.681,54
17	5.944,79	3.310,28	2.634,51	103.371,25
18	5.944,79	3.392,03	2.552,76	99.979,23
19	5.944,79	3.475,80	2.468,99	96.503,43
20	5.944,79	3.561,63	2.383,16	92.941,80
21	5.944,79	3.649,59	2.295,20	89.292,21
22	5.944,79	3.739,71	2.205,08	85.552,50
23	5.944,79	3.832,06	2.112,73	81.720,44
24	5.944,79	3.926,70	2.018,09	77.793,74
25	5.944,79	4.023,67	1.921,12	73.770,07
26	5.944,79	4.123,03	1.821,76	69.647,04
27	5.944,79	4.224,85	1.719,94	65.422,18
28	5.944,79	4.329,18	1.615,61	61.093,00
29	5.944,79	4.436,09	1.508,70	56.656,91
30	5.944,79	4.545,64	1.399,15	52.111,26
31	5.944,79	4.657,90	1.286,89	47.453,36
32	5.944,79	4.772,93	1.171,86	42.680,44
33	5.944,79	4.890,79	1.054,00	37.789,64
34	5.944,79	5.011,57	933,22	32.778,07
35	5.944,79	5.135,33	809,46	27.642,74
36	5.944,79	5.262,15	682,64	22.380,59
37	5.944,79	5.392,10	552,69	16.988,49
38	5.944,79	5.525,26	419,53	11.463,23
39	5.944,79	5.661,71	283,09	5.801,52
40	5.944,79	5.801,52	143,27	0,00

La decima quota interessi è pari a:

$$I_{10} = R \cdot (1 - v^{m-k+1}) = 5.944{,}79 \cdot (1 - 0{,}9759^{40-10+1}) = 3.154{,}16 \text{ Euro}$$

2. Alla fine del 6° anno, l'individuo decide di estinguere il prestito vendendo un TCF, di cui è in possesso, con cedola semestrale pari a Euro 1.000 e scadenza a 5 anni. Determinare il Valore facciale del TCF, ipotizzando che il TIR del titolo sia pari al 5% annuo.

Il debito residuo in *t=6* anni è pari a:

$$D_{12} = R \cdot v \frac{1 - v^{40-12}}{1 - v} = 119.143{,}88 \text{ Euro}$$

In relazione alla periodicità delle cedole (semestrale), è necessario convertire il TIR annuo nel tasso equivalente semestrale:

$$i^*_{sem} = (1 + i^*_{ann})^{1/2} - 1 = 2{,}47\% .$$

Il titolo, il cui prezzo di vendita è pari al debito residuo sopra determinato, avrà un valore facciale pari a:

$$119.143{,}88 = 1.000 \cdot a_{\overline{10}|0{,}0247} + C \cdot (1 + 0{,}0247)^{-10}$$

Da cui:

$$C = \frac{119.143{,}88 - 1.000 \cdot a_{\overline{10}|0{,}0247}}{(1 + 0{,}0247)^{-10}} = 140.873{,}42 \text{ Euro.}$$

ESERCIZIO 2

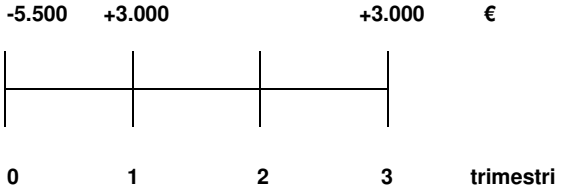
Un individuo dispone di un certo numero di quote dei seguenti titoli:

- Titolo 1: un titolo L caratterizzato dal seguente vettore di importi {-5.500; 3.000; 3.000} sullo scadenzario {0; 1; 3} espresso in trimestri;
- Titolo 2: un BTP con valore facciale pari a C = 4.000 Euro, tasso cedolare 3%, cedole semestrali e scadenza a 2 anni.

Determinare:

1. Il TIR del titolo L;

L'operazione finanziaria che descrive il titolo L è la seguente:



{-5.500, 3.000, 3.000} / {0, 1, 3}

Il TIR esiste ed è unico perché sussiste una sola variazione di segno e 5.500 < 3.000+3.000.

L'equazione del TIR è data quindi da:

$$5.500 = 3.000 \cdot v + 3.000 \cdot v^3 .$$

Il TIR sarà ricavato ricorrendo al *metodo delle corde*. Ponendo:

$$f(v) = 3.000 \cdot v + 3.000 \cdot v^3$$

e fissando i due valori v_1 e v_m tali che:

- $f(v_1) < P$
- $f(v_m) > P$

si ha

$v_1 = 0,955$ ➔ $f(v_1) = 5.477,95 < 5.500$

$v_m = 0,96$ ➔ $f(v_m) = 5.534,21 > 5.500.$

Quindi i valori di v_1 e v_m sono accettabili.

Utilizzando la formula della retta che passa per due punti, si ricava v_2:

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} * (v_m - v_1)$$

Andando a sostituire nella formula precedente i valori su indicati, v_2 è pari a 0,95696.

Ora, fissando un errore pari a $\varepsilon=0,00001$, tale che $f(v_2+\varepsilon) > P$ si ottiene:

$f(v_2+\varepsilon)=5.500,06 > 5.500$ ➔ dunque v_2 è accettabile.

In conclusione il *T.I.R.* è pari a:

$$i^* = \frac{1}{v_2} - 1 = 4,50\% \text{ trimestrale.}$$

2. La Duration del primo ordine e la Scadenza Media Aritmetica dei due titoli, utilizzando, quando necessario, il TIR di cui al punto precedente;

Titolo L

Dal punto precedente si ha che $i_{trim}=4,50\%$ e $v=0,95696$ e quindi.

$$D(L;0) = \frac{1 \cdot 3.000 \cdot v + 3 \cdot 3.000 \cdot v^3}{5.500} = 1,96 \text{ trimestri}$$

$$SMA(L;0) = \frac{1 \cdot 3.000 + 3 \cdot 3.000}{3.000 + 3.000} = 2 \text{ trimestri.}$$

BTP

Il valore della cedola I è:

$$I = 4.000 \cdot 0,03 = 120 \text{ Euro.}$$

Dopo aver convertito il tasso di valutazione trimestrale su base semestrale, è possibile determinare il prezzo del BTP:

$$i_{sem} = (1+0,045)^2 - 1 = 9,20\% \qquad e \qquad v = (1+0,092)^{-1} = 0,916$$

$$P = C \cdot v^4 + 120 \cdot \frac{(1-v^4)}{i} = 3.200,34 \text{ Euro}$$

La duration del primo ordine e la scadenza media aritmetica sono, rispettivamente, pari a:

$$D(BTP;0) = \frac{1 \cdot 120 \cdot v + 2 \cdot 120 \cdot v^2 + 3 \cdot 120 \cdot v^3 + 4 \cdot (120 + 4.000) \cdot v^4}{3.200,34} = 3,81 \text{ semestri}$$

$$SMA(BTP;0) = \frac{1 \cdot 120 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 120 + 4 \cdot (4.000 + 120)}{120 + 120 + 120 + (4.000 + 120)} = 3,84 \text{ semestri.}$$

3. Il numero di quote del titolo L da aggiungere a 3 quote del BTP, affinché il prezzo del BTP sia pari a 1/3 del prezzo del portafoglio z così costruito.

Dato che

$$P_z = 3\,P_{BTP}$$

si ha che

$$\alpha \cdot P_L + 3 \cdot P_{BTP} = 3 \cdot P_{BTP}$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot P_{BTP} - 3 \cdot P_{BTP}}{P_L} = \frac{3 \cdot 3.220{,}34 - 3 \cdot 3.220{,}34}{5.500} = 0\,.$$