MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **10 FEBBRAIO 2009**

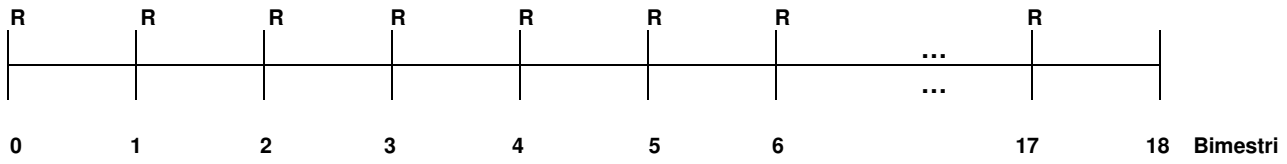
ECONOMIA AZIENDALE

Cognome……..……. Nome ……Matricola……..

ESERCIZIO 1

Un individuo ha oggi a disposizione una somma *S*=20.000 Euro che ha accumulato negli ultimi 3 anni tramite il versamento periodico del 30% del proprio stipendio su un conto corrente remunerato al tasso del 2% semestrale (il versamento avviene contestualmente all'incasso dello stipendio).

1. **Sapendo che lo stipendio gli viene corrisposto bimestralmente in modo anticipato, se ne determini l'importo.**



Trasformiamo innanzitutto il tasso semestrale in tasso bimestrale:

$$i_{1/6} = (1+i_{1/2})^{1/3} - 1 = (1+0{,}02)^{1/3} - 1 = 0{,}66227\%$$

e determiniamo il fattore di sconto su base bimestrale:

$$v = (1+i_{1/6})^{-1} = 0{,}9934209$$

Per poter determinare l'importo dello stipendio calcoliamo innanzitutto la rata R, sapendo che essa viene versata *anticipatamente* in un conto corrente remunerato al tasso del 2% semestrale e che, a distanza di tre anni (18 bimestri), tali versamenti hanno fruttato un capitale S pari a 20.000 Euro, quindi avremo:

$$R \cdot \ddot{a}_{\overline{18}|i_{1/6}} \cdot (1+i_{1/2})^6 = 20.000 \ Euro$$

$$R \cdot \frac{1-v^{18}}{1-v} \cdot (1+i_{1/2})^6 = 20.000 \ Euro$$

da cui:

$$R = \frac{20.000}{\frac{1-v^{18}}{1-v} \cdot (1+i_{1/2})^6} = \frac{20.000}{17{,}03 \cdot (1+0{,}02)^6} = 1.042{,}96\, Euro$$

$$Importo\ Stipendio = \frac{R}{0{,}30} = 3.476{,}54\, Euro$$

Oggi l'individuo vuole acquistare un'automobile il cui costo è pari a 30.000 Euro. A tal fine, versa come anticipo il 50% della somma *S* e gli viene offerta la possibilità di finanziare il costo residuo dell'automobile nei seguenti modi:

- **<u>Alternativa A</u>: versamento di 5 rate semestrali posticipate di importo pari a 4500 Euro.**
- **<u>Alternativa B</u>: versamento, a partire dall'epoca t=1 anno, di 10 rate trimestrali, posticipate e costanti al tasso del 3% annuo;**

Determinare:

2. **la rata da pagare nell'alternativa B;**
3. **in base al criterio del TIR, quale delle due alternative è più conveniente per l'individuo (motivare la risposta).**

2. Il costo residuo da finanziare è pari a:

Anticipo = 20.000 * 50% = *10.000 Euro*

Importo Residuo da Finanziare = 30.000 – 10.000 = *20.000 Euro*

Per determinare la rata da pagare nel caso dell'alternativa B, dobbiamo innanzitutto convertire il tasso annuale in tasso trimestrale:

$$i_{1/4} = (1+i_{ann})^{1/4} - 1 = (1+0{,}03)^{1/4} - 1 = 0{,}7\%$$

e determinare il fattore di sconto *v*:

$$v = (1+i_{1/4})^{-1} = 0{,}9926$$

Ora possiamo determinare la rata R valutando l'operazione finanziaria (rendita temporanea per 10 trimestri, differita di 4 trimestri e a rata costante posticipata) in t=0:

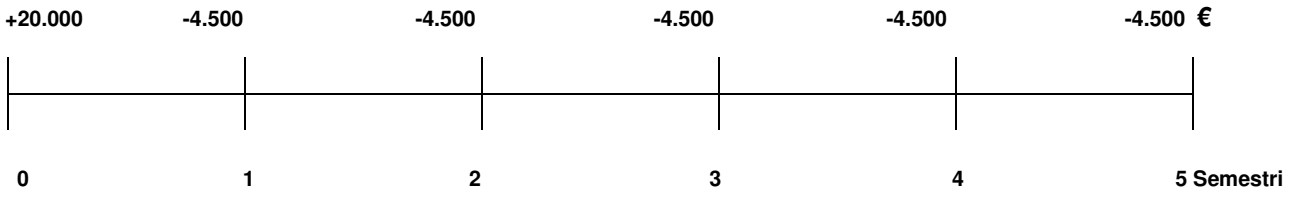
$$R \cdot v^4 \cdot a_{\overline{10}|\, i_{1/4}} = 20.000\, Euro$$

$$R \cdot v^4 \cdot \frac{1-v^{10}}{i_{1/4}} = 20.000\, Euro$$

$$R = \frac{20.000}{v^4 \cdot \frac{1-v^{10}}{i_{1/4}}} = \frac{20.000}{0{,}9926^4 \cdot 9{,}6038781} = 2.144{,}97\, Euro$$

3. <u>TIR proposta A</u>

La proposta A può essere così rappresentata:



Per determinare il TIR della proposta A devo risolvere la seguente equazione:

$$4.500 \cdot a_{\overline{5}|\, i_{1/2}} = 20.000$$

$$4.500 \cdot v \cdot \frac{1-v^5}{1-v} = 20.000$$

Verifichiamo le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- Esiste una sola variazione di segno
- L'importo finanziato è inferiore alle rate da pagare 20.000 < 22.500

Applico dunque il *metodo delle corde*.

Poniamo:

$$f(v) = 4.500 \cdot v \cdot \frac{1-v^5}{1-v}$$

e risolviamo l'equazione trovando due valori v_1 e v_m tali che:

- $f(v_1)<P$
- $f(v_m)>P$

$v_1=0,96$ $\quad f(v_1)=$ 19.939,75 < 20.000

$v_m=0,961$ $\quad f(v_m)=$ 20.000,45 > 20.000

I valori di v_1 e v_m che abbiamo trovato sono accettabili.

Utilizzando la formula della retta che passa fra due punti determino v_2:

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_a)}{f(v_m) - f(v_a)} * (v_m - v_1)$$

Andando a sostituire troviamo $\boldsymbol{v_2=0,96099}$

Fisso un errore pari a $\varepsilon=0,000001$ tale che $f(v_2+\varepsilon)>P$

$f(v_2+\varepsilon)=20.000,06>20.000$ dunque v_2 è accettabile.

$$T.I.R.\ i^*_{1/2} = \frac{1}{v_2} - 1 = 4,06\,\%\,(semestrale)$$

TIR proposta B

Si noti che il TIR della proposta B è indicato nella traccia (3% annuo) e non deve essere quindi calcolato. Su base semestrale è pari quindi a:

$$i^*_{1/2} = (1+i_{ann})^{1/2} - 1 = \ (1+0{,}03)^{1/2} - 1 = 1{,}49\% \ \ (semestrale)$$

$\Rightarrow$ L'alternativa più conveniente per l'individuo è quella con il TIR più basso in quanto si tratta di un'operazione di finanziamento, dunque l'individuo sceglierà la proposta B.

ESERCIZIO 2

In un mercato si possono acquistare all'epoca t=0 due titoli con le seguenti caratteristiche:

- **Titolo 1: TCF emesso alla pari con valore nominale pari a 3.500 Euro, tasso cedolare del 3%, cedole semestrali e scadenza 2 anni;**

- **Titolo 2: TCF con valore facciale pari a 2000 Euro, tasso nominale 5%, cedole quadrimestrali e scadenza a 1 anno.**

Determinare:

1. **il prezzo del Titolo 2 affinchè i due TCF abbiano lo stesso TIR;**
2. **le Duration del primo e del secondo ordine dei due titoli in t=0 (utilizzando il TIR di cui al punto 1).**

1. Il TIR, che deve essere uguale per entrambi i titoli, lo ricaviamo dal Titolo 1 ed è pari al tasso cedolare, dunque:

$$i^*_{1/2} = 3\% \ (TIR\ su\ base\ semestrale)$$

Per ricavare il Prezzo del Titolo 2 dobbiamo convertire il TIR in un tasso quadrimestrale:

$$i^*_{1/3} = (1+0{,}03)^{2/3} - 1 = 1{,}99\% \ (TIR\ su\ base\ quadrimestrale)$$

Prima di determinare il prezzo del Titolo 2 devo calcolare il valore della cedola quadrimestrale:

$$Tasso\ cedolare = Tasso\ nominale\ /\ num.\ di\ cedole\ annuali = \frac{0{,}05}{3} = 0{,}016667\ (quadrimestrale)$$

*Cedola = 2.000 * 1,6667% = 33,33 Euro*

Determiniamo ora il prezzo del Titolo 2:

$$P = 33{,}33 \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}} + 2.000 \cdot (1+i_{1/3})^{-3} \qquad \Rightarrow$$

$$P = 33{,}33 \cdot \left(\frac{1-v^3}{i_{1/3}} \right) + 2.000 \cdot (1+i_{1/3})^{-3} = 1.981{,}34\ Euro$$

2. Duration di primo e secondo ordine dei due titoli

<u>TITOLO 1</u>

Il Titolo 1 paga una cedola semestrale pari a:

$I = 3.500 \cdot 0{,}03 = 105 \ \ Euro$

La duration del primo ordine in t=0 è pari a:

$$D(TCF1;0) = \frac{1 \cdot 105 \cdot v + 2 \cdot 105 \cdot v^2 + 3 \cdot 105 \cdot v^3 + 4 \cdot (105 + 3.500) \cdot v^4}{3.500} = 3{,}83 \ \ semestri$$

Mentre la duration del secondo ordine, sempre in t=0, è pari a:

$$D^2(TCF1;0) = \frac{1^2 \cdot 105 \cdot v + 2^2 \cdot 105 \cdot v^2 + 3^2 \cdot 105 \cdot v^3 + 4^2 \cdot (105 + 3.500) \cdot v^4}{3.500} = 15{,}03 \ \ (semestri)^2$$

<u>TITOLO 2</u>

La duration del primo ordine in t=0 è pari a:

$$D(TCF2;0) = \frac{1 \cdot 33{,}33 \cdot v + 2 \cdot 33{,}33 \cdot v^2 + 3 \cdot (33{,}33 + 2.000) \cdot v^3}{1.981{,}34} = 2{,}95 \ \ quadrimestri$$

Mentre la duration del secondo ordine, sempre in t=0, è pari a:

$$D^2(TCF2;0) = \frac{1^2 \cdot 33{,}33 \cdot v + 2^2 \cdot 33{,}33 \cdot v^2 + 3^2 \cdot (33{,}33 + 2.000) \cdot v^3}{1.981{,}34} = 8{,}79 \ \ (quadrimestri)^2$$