MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **24 FEBBRAIO 2009**

ECONOMIA AZIENDALE

Cognome……..……. Nome ……Matricola……..

ESERCIZIO 1

Un individuo, al quale viene corrisposto trimestralmente in modo posticipato uno stipendio di 5.000 Euro, vuole acquistare un appartamento dal valore di 130.000 Euro. A tal fine, gli vengono proposte le seguenti alternative di mutuo:

- Alternativa A: versamento immediato di 30.000 Euro e pagamento, a partire dall'epoca *t=0*, di *m* rate costanti trimestrali posticipate al tasso del 5% annuo;
- Alternativa B: versamento immediato di 50.000 Euro e pagamento, a partire dall'epoca *t=1 anno*, di 92 rate trimestrali anticipate di importo *R* = 1400 Euro.

1. **Supponendo che l'individuo non possa versare più del 30% del proprio stipendio trimestrale, si determini il numero delle rate ed il relativo importo da versare nell'alternativa A.**

Indichiamo con S il costo dell'appartamento: S=130.000

La parte di costo finanziata con il mutuo, di cui dobbiamo calcolare il numero di versamenti, è:

$$S' = S - 30000 = 100000$$

Calcoliamo dapprima il tasso su base trimestrale corrispondente al tasso annuo del 5%:

$$i_{1/4} = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0{,}05)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}01227 = 1{,}227\%$$

La rata massima che l'individuo può pagare è pari a:

$$R_{MAX} = 30\% \cdot 5000 = 1500$$

Tenendo conto di ciò esprimiamo la somma finanziata con il mutuo nel modo seguente:

$$S' = R_{MAX} \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/4}\right)^{-m}}{i_{1/4}}$$

Da cui, attraverso passaggi matematici, è possibile ottenere "m" come segue:

$$m = -\frac{\log\left[1-\left(S' \cdot i_{1/4}\right)/R_{MAX}\right]}{\log(1+i_4)} = -\frac{\log[1-(100000 \cdot 0{,}01227)/1500]}{\log(1+0{,}01227)} = 139{,}75 \text{ trimestri.}$$

Calcoliamo il valore esatto della rata ponendo m = 140, considerando il seguente valore di v:

$v = (1+0{,}01227)^{-1} = 0{,}9879$

$$S' = R \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/4}\right)^{-m}}{i_{1/4}} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{100000}{\left[\frac{1-v^{140}}{0{,}01227}\right]} = 1498{,}97€$$

2. **Quale delle due alternative è più conveniente per l'individuo secondo il criterio del TIR?**

Il TIR dell'alternativa A è già dato: 5% annuo
L'importo da finanziare nell'alternativa B è pari a: 130000 – 50000 = 80000
L'operazione finanziaria rappresentata dall'alternativa B è spiegata dalla seguente formula:

$P = R \cdot a_{\overline{92}|i_{1/4}} \cdot (1+i_{1/4}) \cdot (1+i_{1/4})^{-4}$ *che possiamo riscrivere nel seguente modo:*

$$80000 = 1400 \cdot \frac{1-v^{92}}{1-v} \cdot v^4$$

Si tratta, dunque, di calcolare il T.I.R. di questa operazione finanziaria tramite il metodo delle corde. Innanzitutto verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- *P < f(1)* → 80000 < 1400*92

I STEP:

Poniamo $f(v) = 1400 \cdot \frac{1-v^{92}}{1-v} \cdot v^4$ *e risolviamo tale equazione trovando due valori :*

- v_1 tale che $f(v_1) < P$
- v_m tale che $f(v_m) > P$

$v_1 = 0{,}98$ $f(v_1) = 54501{,}06 < 80000$
$v_m = 0{,}99$ $f(v_m) = 81136{,}84 > 80000$

Sono quindi due valori accettabili.

II STEP:

Determiniamo il valore di v_2 grazie alla formula della retta passante per due punti:

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

Sostituendo i valori otteniamo $v_2 = 0{,}98957$

III STEP:

Fissiamo un livello di errore accettabile $\varepsilon = 0{,}0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

$f(v_2+\varepsilon) = 80009 > 80000$ *dunque il valore di* v_2 *è accettabile.*

CALCOLIAMO ORA IL T.I.R.:

$i_{1/4}^{*} = \frac{1}{v_2} - 1 = 0{,}0105 = 1{,}05\%$ il quale corrisponde ad un tasso annuo pari a:

$i_1 = (1+0{,}0105)^4 - 1 = 0{,}0427 = 4{,}27\%$ (annuo)

Trattandosi di finanziamento, l'alternativa più conveniente per l'individuo è la B.

3. **Si determini inoltre l'importo della rata *R* da pagare nell'alternativa B (anziché 1400 Euro) affinché le due alternative di mutuo siano caratterizzate da uno stesso tasso (pari al 5% annuo).**

$R = \frac{80000}{\frac{1-v^{92}}{1-v} \cdot v^4}$ =1509,9€ dove v=0,9879 così come calcolato al punto 1.

<u>ESERCIZIO 2</u>

In un mercato in cui vige un tasso del 3% su base annua, oggi un individuo acquista un portafoglio formato da 2 quote del <u>Titolo A</u> e da 3 di quote del <u>Titolo B</u>, dove

- <u>Titolo A</u>: TCF quotato alla pari con prezzo pari a 1.000 Euro, cedola semestrale, tasso cedolare del 2% e scadenza a 1,5 anni;
- <u>Titolo B</u>: prezzo pari a 1.500 Euro, pagamento di un importo pari ad *S* al tempo t=2 anni, pagamento di un importo pari ad 2*S* al tempo t=3 anni.

1. **Calcolare l'importo S del Titolo B;**

L'operazione finanziaria che descrive il titolo B è la seguente:

$1500 = S \cdot (1+0{,}03)^{-2} + 2S \cdot (1+0{,}03)^{-3}$ da cui attraverso semplici passaggi algebrici si ricava S come segue:

$$S = \frac{1500}{1{,}03^{-2} + 2 \cdot 1{,}03^{-3}} = 540{,}95$$

2. **La variazione percentuale del prezzo del portafoglio qualora dovesse intervenire una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi=+ 0.002 al tempo t=1 quadrimestre.**

Per calcolare la duration del portafoglio è necessario calcolare prima la duration dei due titoli

$$D(0,TCF)=\frac{\sum_{K=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$$

Calcoliamo prima la cedola, il tasso semestrale corrispondente al 3% annuo e il corrispondente fattore di attualizzazione:

$$I = 0{,}02 \cdot 1000 = 20$$

$$i_{1/2} = (1+0{,}03)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0149 = 1{,}49\%$$

$$v = (1+0{,}0149)^{-1} = 0{,}98532$$

$$D(0,TCF) = \frac{1 \cdot 20 \cdot 0{,}98532 + 2 \cdot 20 \cdot 0{,}98532^2 + 3 \cdot (1000+20) \cdot 0{,}98532^3}{20 \cdot 0{,}98532 + 20 \cdot 0{,}98532^2 + (1000+20) \cdot 0{,}98532^3} = 2{,}94 \text{ semestri} = 1{,}47 \text{ anni}$$

Per calcolare la duration del titolo B dobbiamo calcolare prima il fattore di attualizzazione corrispondente al 3% annuo:

$$v = (1+0{,}03)^{-1} = 0{,}97087$$

$$D(0,titoloB) = \frac{2 \cdot 540{,}95 \cdot 0{,}97087^2 + 3 \cdot (2 \cdot 540{,}95) \cdot 0{,}97087^3}{1500} = 2{,}66 \text{ anni}$$

Calcoliamo ora la duration del portafoglio:

$$D(0,z) = \frac{\alpha P_{TCF} \cdot D(0,TCF) + \beta P_{TitoloB} \cdot D(0,TitoloB)}{\alpha P_{TCF} + \beta P_{TitoloB}}$$

Dove con a *= 2 indichiamo le quote del TCF e con* b*=3 indichiamo le quote del titolo B, e come duration dei due titoli utilizziamo quelle espresse in anni:*

$$D(0,z) = \frac{2 \cdot 1014{,}89 \cdot 1{,}47 + 3 \cdot 1500 \cdot 2{,}66}{2 \cdot 1014{,}89 + 3 \cdot 1500} = 2{,}29 \text{ anni}$$

$$D(t,z) = D(0,z) - t = 2{,}29 - \frac{4}{12} = 1{,}96 \text{ anni}$$

Siamo ora in grado di calcolare la variazione percentuale del prezzo del portafoglio:

$$\Delta W(t,z) = -\frac{1}{1+i} \cdot D(t,z) \cdot \Delta i = -\frac{1}{1{,}03} \cdot 1{,}96 \cdot 0{,}002 = -0{,}40\%$$