MATEMATICA FINANZIARIA 1

PROVA SCRITTA DEL **07 LUGLIO 2009**

ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

Un individuo vuole acquistare un immobile il cui costo è pari a 140.000 Euro. A tal fine, gli vengono prospettate le seguenti alternative di mutuo:

- Alternativa A: versamento immediato del 20% del valore dell'immobile e pagamento della parte residua tramite rate mensili posticipate al tasso del 3,5% annuo per 20 anni;
- Alternativa B: versamento immediato di 40.000 Euro e pagamento, a partire dall'epoca t=2 anni, di 12 rate annuali posticipate di importo pari a 10.000 Euro.

Determinare:

1. **la rata da pagare nell'alternativa A e si rediga il piano d'ammortamento per i primi 5 pagamenti;**

Indichiamo con S il costo dell'appartamento: S=140.000€
La parte di costo finanziata con il mutuo, di cui dobbiamo calcolare il valore della rata, è:

$$S' = S - 20\% \cdot 140000 = 112000$$

Calcoliamo il tasso mensile corrispondente al 3,5% annuo. In base alla relazione definita per i tassi equivalenti nel regime dell'interesse composto

$$(1+0{,}035) = (1+i_{1/12})^{12} \quad da\ cui \quad i_{1/12} = 0{,}287\%\ .$$

Imposto la relazione di equità : $S' = R \cdot a_{240|i_{1/12}}$ *, sostituisco i valori noti* :

$$112000 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}00287)^{-240}}{0{,}00287} \quad da\ cui\ si\ ricava\ \ R = 646{,}40€$$

Piano di ammortamento a rata costante ($R_k = R$) :

k (mesi)	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	112000 = S'
1	646,40 = R	324,86 $C_1 = R - I_1 = R*v^{240}$	321,54 $I_1 = i_{1/12} * D_0 = R - C_1$	111.675,14 $= D_0 - C_1$
2	646,40 = R	325,79 $C_2 = R - I_2 = R*v^{239}$	320,61 $I_2 = i_{1/12} * D_1 = R - C_2$	111.349,35 $= D_1 - C_2$
3	646,40 = R	326,73 $C_3 = R - I_3 = R*v^{238}$	319,67 $I_3 = i_{1/12} * D_2 = R - C_3$	111.022,63 $= D_2 - C_3$
4	646,40 = R	327,66 $C_4 = R - I_4 = R*v^{237}$	318,73 $I_4 = i_{1/12} * D_3 = R - C_4$	110.694,96 $= D_3 - C_4$

5	646,40 = R	328,60 $C_5 = R - I_5 = R*v^{236}$	317,79 $I_5 = i_{1/12} * D_4 = R - C_5$	110.366,36 $= D_4 - C_5$

2. **in base al criterio del TIR, quale delle due alternative è più conveniente per l'individuo (motivare la risposta).**

Il TIR dell'alternativa A è già dato: 3,5% annuo
L'importo da finanziare nell'alternativa B è pari a: 140.000 – 40.000 = 100.000
L'operazione finanziaria rappresentata dall'alternativa B è spiegata dalla seguente formula (valore attuale di una rendita a rata costante posticipata, differita di due anni e temporanea per 12 anni) :

$$100000 = 10000 \cdot v \frac{1 - v^{12}}{1 - v} \cdot v^2$$

Si tratta, dunque, di calcolare il T.I.R. di questa operazione finanziaria tramite il metodo delle corde. Innanzitutto verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- *P < f(1)* →100.000 < 10.000*12

I STEP:

Poniamo $f(v) = 10000 \cdot \frac{1 - v^{12}}{1 - v} \cdot v^3$ *e risolviamo tale equazione trovando due valori :*

- v_1 tale che $f(v_1) < P$
- v_m tale che $f(v_m) > P$

$v_1 = 0{,}975$ $f(v_1) = 97135{,}48 < 100000$
$v_m = 0{,}985$ $f(v_m) = 105676{,}91 > 100000$

Sono quindi due valori accettabili.

II STEP:

Determiniamo il valore di v_2 *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

Sostituendo i valori otteniamo $v_2 = 0{,}9784$

III STEP:

Fissiamo un livello di errore accettabile $\varepsilon = 0.0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

$f(v_2+\varepsilon) = f(0{,}9875) = 100.000{,}13 > 100.000$ *dunque il valore di* v_2 *è accettabile*

CALCOLIAMO ORA IL T.I.R.:

$$i^* = \frac{1}{v_2} - 1 = 0{,}0221 = 2{,}21\%$$

Trattandosi di un finanziamento,minore è l'interesse minore è il costo, per cui l'alternativa più conveniente per l'individuo è la B, essendo il tasso di interesse inferiore rispetto alla alternativa A.

<u>ESERCIZIO 2</u>

In un mercato ideale si possono acquistare all'epoca t=0 due titoli con le seguenti caratteristiche:

- <u>Titolo 1</u>: TCN con prezzo pari a 3.000 Euro, valore nominale pari a 3.500 Euro e scadenza 2 anni;
- <u>Titolo 2</u>: TCF con prezzo pari a 2.000 Euro, cedole quadrimestrali pari a 100 Euro e scadenza 1 anno.

Determinare in t =0:

1. **Il valore facciale del TCF affinché esso presenti lo stesso TIR su base annua del TCN;**

Il TIR del TCN è pari a:

$$i = \frac{1}{\left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3000}{3500}}} - 1 = 0{,}0801 = 8{,}01\%$$

Impostiamo l'equazione che rappresenta l'operazione finanziaria costituita dal TCF:

$$2000 = 100 \cdot \frac{1-(1+i_{1/3})^{-3}}{i_{1/3}} + C \cdot v^3$$

Poiché dobbiamo utilizzare il tir del TCN che è espresso su base annua, trasformiamo il tasso da annuale a quadrimestrale secondo la regola dei tassi equivalenti:

$$(1+0{,}0801) = (1+i_{1/3})^3$$

da cui $i_{1/3} = (1+0{,}0801)^{1/3} - 1$, *quindi* $i_{1/3} = 2{,}6\%$

Sostituiamo questo valore nella formula precedente:

$$2000 = 100 \cdot \frac{1-(1+0.026)^{-3}}{0.026} + C \cdot 0.9746^3, \text{ da cui}$$

$C \cdot 0{,}9258 = 1714{,}96$, quindi

C =1852,37 €

2. **le Duration del secondo ordine dei due titoli, utilizzando il TIR di cui al punto precedente;**

$D(0,TCN) = 2\,anni$

$D^2(0,TCN) = 4$ *(anni²)*

$$D(0,TCF) = \frac{1\cdot 100\cdot 0{,}9746 + 2\cdot 100\cdot 0{,}9746^2 + 3\cdot(1852{,}37+100)\cdot 0{,}9746^3}{2000} = 2{,}855 \text{ quadrimestri}$$

$$D^2(0,TCF) = \frac{1^2\cdot 100\cdot 0{,}9746 + 2^2\cdot 100\cdot 0{,}9746^2 + 3^2\cdot(1852{,}37+100)\cdot 0{,}9746^3}{2000} = 8{,}373\,(\text{quadrimestri}^2).$$

3. **la quota α del TCF e la quota β del TCN affinché la Duration del Portafoglio z, così composto, sia pari a 1,52 anni ed il prezzo di z sia pari a 11.000 Euro.**

Per calcolare la duration del portafoglio, è necessario calcolare la duration dei due titoli

$D(0,TCN) = 2$

$$D(0,TCF) = \frac{1\cdot 100\cdot 0{,}9746 + 2\cdot 100\cdot 0{,}9746^2 + 3\cdot(1852{,}37+100)\cdot 0{,}9746^3}{2000} = 2{,}855\,\text{quadrim} = 0{,}952 \text{ anni}$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha\cdot P_{TCF} + \beta\cdot P_{TCN} = 11000 \\ \dfrac{\alpha\cdot P_{TCF}\cdot D(0,TCF) + \beta\cdot P_{TCN}\cdot D(0,TCN)}{11000} = 1{,}52 \end{cases}$$

Svolgendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha\cdot 2000 + \beta\cdot 3000 = 11000 \\ \dfrac{\alpha\cdot 2000\cdot 0{,}952 + \beta\cdot 3000\cdot 2}{11000} = 1{,}52 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \alpha\cdot 2000 + \beta\cdot 3000 = 11000 \\ \alpha\cdot 2000\cdot 0{,}952 + \beta\cdot 3000\cdot 2 = 1{,}52\cdot 11000 \end{cases}$$

Sostituendo ad esempio alfa:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{11000 - \beta\cdot 3000}{2000} \\ \dfrac{11000 - \beta\cdot 3000}{2000}\cdot 2000\cdot 0{,}952 + \beta\cdot 6000 = 16720 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{11000 - \beta\cdot 3000}{2000} \\ 11000\cdot 0{,}952 - \beta\cdot 3000\cdot 0{,}952 + \beta\cdot 6000 = 16720 \Rightarrow \beta\cdot 6000 - \beta\cdot 2856 = 16720 - 10472 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{11000 - \beta\cdot 3000}{2000} \\ \beta\cdot 3144 = 6248 \end{cases} \quad \text{da cui si ottengono i valori di quote pari a :} \quad \begin{cases} \alpha = 2{,}52 \\ \beta = 1{,}99 \end{cases}$$