MATEMATICA FINANZIARIA 1
PROVA SCRITTA DEL **21 LUGLIO 2009**
ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

Un individuo intende acquistare un motorino che ha un prezzo di 3200€. Volendo accedere ad un finanziamento, gli vengono proposte le seguenti alternative:

- **Alternativa A: versamento immediato del 10% del prezzo e pagamento di altre 10 rate posticipate costanti mensili di importo 320€;**
- **Alternativa B: anticipo zero e pagamento tra un anno di 3500€.**

Determinare:

1. **in base al criterio del TIR, quale delle due alternative è più conveniente per l'individuo (motivare la risposta).**
2. **l'importo da pagare tra un anno, affinché l'alternativa B abbia lo stesso TIR dell'alternativa A.**

Svolgimento

1. **in base al criterio del TIR, quale delle due alternative è più conveniente per l'individuo (motivare la risposta).**

Indichiamo con P il prezzo del motorino: P=3.200€

Alternativa A:

La parte di costo finanziata con il mutuo, di cui dobbiamo calcolare il valore della rata, è:

$$P' = P - 10\% \cdot 3.200 = 2.880$$

La operazione finanziaria può quindi essere così schematizzata:

$$\{(+3.200 - 320 = +2.880), -320, -320, -320, -320, -320, -320, -320, -320, -320, -320\} / \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
{importi in euro}/{tempi in mesi}

Si imposta la relazione di equità : $P' = R \cdot a_{\overline{10}|i_{1/12}} = R \cdot v \cdot \dfrac{1 - v^{10}}{1 - v}$

Sostituendo i valor noti la relazione, diventa la seguente : $2880 = 320 \cdot v \dfrac{1 - v^{10}}{1 - v}$

Dovendo calcolare il T.I.R. di questa operazione finanziaria procediamo attraverso il metodo delle corde. Innanzitutto verifichiamo che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del T.I.R.:

- *esiste una variazione di segno*
- *P' < f(1)* $\rightarrow 2.880 < 320*10$

I PASSO:

Poniamo $f(v) = 320 \cdot v \cdot \frac{1-v^{10}}{1-v}$ *e risolviamo l'equazione trovando due valori :*

- v_1 tale che $f(v_1) < P'$
- v_m tale che $f(v_m) > P'$

$v_1 = 0{,}98$ $f(v_1) = 2868{,}30 < 2880$
$v_m = 0{,}99$ $f(v_m) = 3029{,}18 > 2880$

I due valori scelti sono valori accettabili.

II PASSO:

Determiniamo il valore di v_2 *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P' - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

Sostituendo i valori otteniamo $v_2 = 0{,}9807$

III STEP:

Fissiamo un livello di errore accettabile $\varepsilon = 0{,}0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

$f(v_2+\varepsilon) = f(0{,}9808) = 2.880{,}82 > 2.880$ *dunque il valore di* v_2 *è accettabile*

CALCOLIAMO ORA IL T.I.R.:

$$i^*_{1/12} = \frac{1}{v_2} - 1 = \frac{1}{0{,}9807} - 1 = 0{,}0197 = 1{,}97\% \text{ mensile}$$

Il tasso annuo equivalente, calcolato attraverso la relazione dei tassi equivalenti in regime di interesse composto, risulta pari a :

$$i^* = \left(1 + i^*_{1/12}\right)^{12} - 1 = (1 + 0{,}0197)^{12} - 1 = 0{,}2630 = 26{,}30\%$$

<u>*Alternativa B*</u>*:*
$\{+3.200, -3.500\}/\{0, 1\}$
{importi in euro}/{tempi in anni}

Il TIR della seconda operazione si ricava andando a calcolare il tasso di interesse

$$i^* = \frac{M - P}{P} = \frac{3500 - 3200}{3200} = 0{,}0938 = 9{,}38\%$$

Trattandosi di un finanziamento,minore è l'interesse minore è il costo, per cui l'alternativa più conveniente per l'individuo è la B, essendo il tasso di interesse inferiore rispetto alla alternativa A.

2. **l'importo da pagare tra un anno, affinché l'alternativa B abbia lo stesso TIR dell'alternativa A.**

$\{+3.200, -M\}/\{0, 1\}$
{importi in euro}/{tempi in anni}

Si imposta la relazione di equità, $P = M \cdot v$, con $v = \frac{1}{(1+i_A^*)}$

Da cui si ricava

$$M = \frac{P}{v} = \frac{P}{\left[\frac{1}{1+i_A^*}\right]} = \frac{3200}{\left[\frac{1}{1+0{,}2630}\right]} = 4.041{,}76 \text{ €}$$

<u>ESERCIZIO 2</u>

Un individuo, con un capitale di 20.000€, intende investire l'intero importo a sua disposizione per acquistare all'epoca t=0 due titoli con le seguenti caratteristiche:

- <u>Titolo 1</u>: TCN con valore nominale pari a 100€ e scadenza 3 anni;
- <u>Titolo 2</u>: TCF quotato alla pari con valore nominale pari a 500€ Euro, tasso nominale annuo 12%, cedole semestrali e scadenza 2 anni.

Sapendo che sul mercato vige un tasso di interesse pari al TIR del TCF (precedentemente definito) a cui sono valutate tutte le operazioni finanziarie, determinare in t =0:

1. Il prezzo del TCN;
2. le quote dei due titoli affinché il portafoglio Z abbia duration pari a 2 anni.

A fronte della variazione del tasso annuo di interesse (TIR del TCF) pari a Δi = - 0,035 dopo 4 mesi, determinare

3. la Variazione Percentuale del Prezzo del Portafoglio Z determinato al punto 2. Commentare quindi cosa accade al prezzo del portafoglio.

<u>Svolgimento</u>

1) determinare in t =0 il prezzo del TCN

TCN:

C = 100€ , scadenza = 3 anni , P = ? ,

L' operazione finanziaria che descrive il TCN è dunque la seguente:

$$\{-P, +100\}/\{0,3\} anni$$

La relazione di equità : $P = C \cdot v^3$, con $v = \frac{1}{(1+i)}$.

E' necessario quindi ricavare il tasso di interesse di mercato pari al TIR del TCF.

TCF:

C = 500€; il titolo è quotato alla pari, quindi P = 500€
i_{nom} = 12% cedole semestrali scadenza = 2 ANNI

Valore cedola: $I = \frac{500 \cdot 0{,}12}{2} = 30$

L' operazione finanziaria che descrive il TCF è dunque la seguente :

$$\{-500, 30, 30, 30, 530\} / \{0,1,2,3,4\} semestri$$

Dal momento che il titolo quota alla pari, è superfluo procedere con il metodo delle corde.
E' infatti dimostrato che il TIR, in caso di titolo quotato alla pari, coincide con il tasso cedolare.

$i_{ced} = \frac{I}{C} = \frac{30}{500} = 0{,}06 \Rightarrow$ *questo è il TIR espresso su base semestrale (la cedola è semestrale)*

Attraverso la relazione dei tassi equivalenti in regime di interesse composto ricaviamo il tasso annuo equivalente:

$i = \left(1 + i_{1/2}\right)^2 - 1 = (1 + 0{,}06)^2 - 1 = 0{,}1236 = 12{,}36\% \Rightarrow$ *questo è il TIR espresso su base annua.*

A questo punto, noto il tasso di interesse di mercato, coincidente con il TIR del TCF, è possibile risolvere la relazione di equità del TCN descritta in precedenza.

$$P = C \cdot v^3 = C \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 = 100 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}1236}\right)^3 = 70{,}50\,€$$

2) **determinare in t =0 le quote dei due titoli affinché il portafoglio Z abbia duration pari a 2 anni.**

P_{TCN} = 70,50€
P_{TCF} = 500€

Dal momento che l'individuo intende investire l'intero importo di 20.000€ a sua disposizione per acquistare all'epoca t=0 i due titoli, dovrà valere la relazione :

$$\alpha \cdot P_{TCN} + \beta \cdot P_{TCF} = 20.000$$

La seconda condizione da rispettare è che la duration del portafoglio Z sia pari a 2 anni, ovvero:

$$\frac{\alpha \cdot P_{TCN} \cdot D(0,TCN) + \beta \cdot P_{TCF} \cdot D(0,TCF)}{\alpha \cdot P_{TCN} + \beta \cdot P_{TCF}} = 2$$

Abbiamo quindi un sistema di due equazioni in due incognite :

$$\begin{cases} \alpha \cdot P_{TCN} + \beta \cdot P_{TCF} = 20.000 \\ \dfrac{\alpha \cdot P_{TCN} \cdot D(0,TCN) + \beta \cdot P_{TCF} \cdot D(0,TCF)}{20.000} = 2 \end{cases}$$

E' necessario innanzitutto calcolare le duration dei due titoli :

D(0,TCN) = 3 anni

$$D(0,TCF) = \frac{1 \cdot 30 \cdot v + 2 \cdot 30 \cdot v^2 + 3 \cdot 30 \cdot v^3 + 4 \cdot (30+500) \cdot v^4}{500} = 3{,}68 \;\; semestri = 1{,}84 anni$$

con $v = \dfrac{1}{(1+i)} = \dfrac{1}{1+0{,}06} = 0{,}9434$

Il sistema da risolvere diventa quindi il seguente :

$$\begin{cases} \alpha \cdot 70{,}50 + \beta \cdot 500 = 20.000 \\ \dfrac{\alpha \cdot 70{,}50 \cdot 3 + \beta \cdot 500 \cdot 1{,}84}{20.000} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{20.000 - \beta \cdot 500}{70{,}50} \\ \dfrac{20.000 - \beta \cdot 500}{70{,}50} \cdot 70{,}50 \cdot 3 + \beta \cdot 500 \cdot 1{,}84 = 2 \cdot 20.000 \end{cases}$$

Attraverso passaggi algebrici si arriva alla soluzione cercata.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{20.000 - \beta \cdot 500}{70{,}50} \\ 60.000 - \beta \cdot 1.500 + \beta \cdot 920 = 40.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{20.000 - \beta \cdot 500}{70{,}50} \\ -\beta \cdot 580 = 40.000 - 60.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{20.000 - \beta \cdot 500}{70{,}50} \\ \beta = \dfrac{-20.000}{-580} = 34{,}48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{20.000 - 34{,}48 \cdot 500}{70{,}50} = 39{,}15 \\ \beta = 34{,}48 \end{cases}$$

3) la Variazione Percentuale del Prezzo del Portafoglio Z determinato al punto 2. Commentare quindi cosa accade al prezzo del portafoglio.

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(t,z) \cdot \Delta i$$

Conosciamo $i^* = 12{,}36\% \Rightarrow \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+0{,}1236}$,

ci viene detto che la variazione è pari a Δi = -0,035

Calcoliamo la duration attraverso la relazione nota :

$D(t,z) = D(0,z) - t$ = 2 anni – 4 mesi = 2 – 4/12 = 1,67 anni

Siamo quindi in grado di calcolare il risultato richiesto :

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+0{,}1236} \cdot 1{,}67 \cdot (-0{,}035) = +0{,}0519$$

A fronte di una diminuzione del tasso annuo di interesse (variazione pari a Δi = - 0,035) osserviamo che il prezzo del portafoglio aumenta del 5,19%.