MATEMATICA FINANZIARIA 1
PROVA SCRITTA DEL **15 SETTEMBRE 2009**
C.d.L. ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

a) **Il Sig. Rossi oggi (t=0) vuole acquistare un furgone del valore di 27000€ per la sua attività commerciale. A tal fine egli versa 3.000€ in t=0. Per la parte residua del debito gli vengono proposte le seguenti alternative di pagamento:**
   - **Pagamento di 16.000€ in t_1=6 mesi e di 10.000€ in t_2=12 mesi;**
   - **Pagamento di 18.500€ in t_2=12 mesi e di 10.000€ in t_3=24 mesi.**

   Dire quale delle due modalità di restituzione del prestito è preferibile in base al criterio del TIR.

b) **Calcolare il numero di rate necessarie ad estinguere il finanziamento di 24.000€ per l'acquisto del furgone qualora il Sig. Rossi ripaghi il debito tramite una rendita a rata costante bimestrale posticipata, con rate bimestrali non superiori a 950€. Come tasso di interesse utilizzare il TIR dell'alternativa ritenuta preferibile al punto a).**

c) **Calcolare la ventinovesima Quota Interesse e Quota Capitale del Piano di Ammortamento definito al punto b).**

Svolgimento

Indichiamo con F il prezzo del furgone: F=27.000€.
La parte di costo residua del debito risulta pari a $A' = F - 3.000 = 24000$ euro
La prima alternativa di pagamento può essere così rappresentata :

$\{+24.000, -16.000, -10.000\}/\{0,\ 6, 12\}$ {importi in euro}/{tempi in mesi}
equivalente alla rappresentazione
$\{+24.000, -16.000, -10.000\}/\{0,\ 1, 2\}$ {importi in euro}/{tempi in semestri}

La relazione di equità è quindi data da:
$24.000 = 16.000 \cdot v + 10.000 \cdot v^2$,
ovvero
$10.000 \cdot v^2 + 16.000 \cdot v - 24.000 = 0$,
che può essere risolta attraverso le regole risolutive delle equazioni di secondo grado.
I risultati che si ottengono sono i seguenti :

$$\begin{cases} v_1 = -2{,}54 \\ v_2 = 0{,}9436 \end{cases}.$$

Ma il primo dei due valori (v_1=*-2,54*) è evidentemente un risultato NON AMMISSIBILE!
Da v_2 = *0,9436* , avendo considerato come tempo i semestri, si ricava il tasso di interesse semestrale:

$$i^*_{1/2} = \frac{1}{v_2} - 1 = \frac{1}{0{,}9436} - 1 = 0{,}0598 = 5{,}98\%$$

Il tasso annuo equivalente, calcolato attraverso la relazione dei tassi equivalenti in regime di interesse composto, risulta pari a :

$$i^* = \left(1 + i^*_{1/2}\right)^2 - 1 = (1 + 0{,}0598)^2 - 1 = 0{,}1232 = 12{,}32\%$$

La seconda alternativa di pagamento può essere così rappresentata :

$\{+24.000, -18.500, -10.000\}/\{0,\ 12, 24\}$ {importi in euro}/{tempi in mesi}
equivalente alla rappresentazione
$\{+24.000, -18.500, -10.000\}/\{0,\ 1, 2\}$ {importi in euro}/{tempi in anni}

La relazione di equità è quindi data da:

$24.000 = 18.500 \cdot v + 10.000 \cdot v^2$,
ovvero
$10.000 \cdot v^2 + 18.500 \cdot v - 24.000 = 0$,
che può essere risolta attraverso le regole risolutive delle equazioni di secondo grado.
I risultati che si ottengono sono i seguenti :

$$\begin{cases} v_1 = -2,73 \\ v_2 = 0,8793 \end{cases}.$$

Ma il primo dei due valori (v_1=*-2,73*) è evidentemente un risultato NON AMMISSIBILE!

Da v_2 = *0,8793* , avendo considerato come tempo gli anni, si ricava il tasso di interesse annuo:

$$i^* = \frac{1}{v_2} - 1 = \frac{1}{0,8793} - 1 = 0,1372 = 13,72\%$$

Avendo calcolato il TIR su base annua delle due modalità di restituzione del prestito, confrontando i due valori ottenuti
i^* *(modalità 1)* = 12,32%,
i^* *(modalità 2)* = 13,72%,
trattandosi di un finanziamento, risulta preferibile la prima modalità di restituzione, visto il tasso di interesse inferiore.

b) Calcolare il numero di rate necessarie ad estinguere il finanziamento di 24.000€ per l'acquisto del furgone qualora il Sig. Rossi ripaghi il debito tramite una rendita a rata costante bimestrale posticipata, con rate bimestrali non superiori a 950€. Come tasso di interesse utilizzare il TIR dell'alternativa ritenuta preferibile al punto a).

E' necessario impostare la relazione di equità relativa al calcolo del valore attuale di una rendita immediata temporanea anticipata.

$VA = R_{MAX} \cdot \frac{1 - v^m}{i_{1/6}}$, dove VA=24.000, R_{MAX} = 950.

E' necessario innanzitutto calcolare il tasso di interesse bimestrale equivalente al tasso di interesse annuo *i=12,32%*

$$i_{1/6} = (1+i)^{\frac{1}{6}} - 1 = (1+0,1232)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,0196 = 1,96\%$$

Dalla relazione di equità, attraverso passaggi matematici, è possibile ottenere "m", incognita, come segue:

$$m = \frac{\log\left[1 - \left(VA \cdot i_{1/6}\right) / R_{MAX}\right]}{\log(v)}$$, dove ovviamente $v = \frac{1}{1 + i_{1/6}}$

Sostituendo i valori si ricava $m = \frac{\log[1 - (24000 \cdot 0,0196)/950]}{\log(0,9808)} = 35,18$ *bimestri.*

Poiché m=35,18 bimestri non è un numero intero, allora il numero di rate necessarie per estinguere il finanziamento è il numero intero successivo, m=36.
L'ammontare della rata R' nel caso in cui siano effettuati 36 versamenti risulta pari a :

$$R' = \frac{VA}{a_{\overline{36}|i_{1/6}}} = \frac{24000}{\left[\frac{1 - (0,9808)^{36}}{0,0196}\right]} = 934,86$$

c) **Calcolare la ventinovesima Quota Interesse e Quota Capitale del Piano di Ammortamento definito al punto b).**

Si tratta di un piano di ammortamento a rata costante, per il quale valgono le specifiche regole di calcolo.
La ventinovesima quota interessi risulta pari a :

$$I_{29} = R \cdot (1 - v^{m-k+1}) = 934{,}86 \cdot (1 - 0{,}9808^{36-29+1}) = 134{,}17 \text{ euro.}$$

La ventinovesima quota capitale quindi è pari a :

$$C_{29} = R - I_{29} = 934{,}86 - 134{,}17 = 800{,}69 \text{ euro.}$$

Alternativa estremamente laboriosa è la costruzione dell'intero piano di ammortamento a rata costante per 36 bimestri.

k (bimestri)	Rata	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	24000
1	934,86	465,56	469,30	23534,44
2	934,86	474,67	460,19	23059,77
3	934,86	483,95	450,91	22575,83
4	934,86	493,41	441,45	22082,42
5	934,86	503,06	431,80	21579,36
6	934,86	512,89	421,96	21066,46
7	934,86	522,92	411,93	20543,54
8	934,86	533,15	401,71	20010,39
9	934,86	543,57	391,28	19466,82
10	934,86	554,20	380,65	18912,61
11	934,86	565,04	369,82	18347,57
12	934,86	576,09	358,77	17771,48
13	934,86	587,35	347,50	17184,13
14	934,86	598,84	336,02	16585,29
15	934,86	610,55	324,31	15974,74
16	934,86	622,49	312,37	15352,25
17	934,86	634,66	300,20	14717,59
18	934,86	647,07	287,79	14070,53
19	934,86	659,72	275,13	13410,80
20	934,86	672,62	262,23	12738,18
21	934,86	685,78	249,08	12052,41
22	934,86	699,18	235,67	11353,22
23	934,86	712,86	222,00	10640,36
24	934,86	726,80	208,06	9913,57
25	934,86	741,01	193,85	9172,56
26	934,86	755,50	179,36	8417,06
27	934,86	770,27	164,59	7646,79
28	934,86	785,33	149,53	6861,46
29	934,86	**800,69**	**134,17**	6060,77
30	934,86	816,34	118,51	5244,43
31	934,86	832,31	102,55	4412,12
32	934,86	848,58	86,27	3563,54
33	934,86	865,18	69,68	2698,36
34	934,86	882,09	52,76	1816,27
35	934,86	899,34	35,52	916,93
36	934,86	916,93	17,93	0,00

ESERCIZIO 2

Il signor Verdi acquista oggi (t=0):

- **200 quote di TCN con valore facciale pari a Euro 100 e scadenza in t=2,5 anni;**
- **5 quote di TCF con cedole trimestrali, scadenza 1,5 anni, valore nominale 1000 e tasso nominale annuo j=15%.**

a) Calcolare la scadenza media aritmetica e la duration del primo ordine delle due operazioni finanziarie in t = 0.

b) A fronte di un portafoglio Z composto da quote dei due titoli descritti in precedenza, calcolare la Variazione Percentuale del Prezzo di tale portafoglio a fronte della variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi = 0,075 dopo 1 bimestre. Descrivere come cambia il valore del portafoglio in seguito alla variazione di tasso.

Utilizzare un tasso annuo del 5,5% per tutti i calcoli finanziari dell'Esercizio 2.

TCN

C = 100€
n = 2,5 anni
i = 5,5%

$$P = C \cdot v^n \text{, dove } v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0{,}05} = 0{,}9479$$

$$P = 100 \cdot (0{,}9479)^{2,5} = 87{,}5 \text{ euro}$$

Schematicamente quindi si ha :
$\{-87{,}5;100\}/\{0;2{,}5\}$
{importi in euro}/{tempi in anni}

Scadenza Media Aritmetica = SMA

$$SMA_{TCN} = \frac{2{,}5 \cdot 100}{100} = 2{,}5 \text{ anni}$$

$$D_{TCN} = \frac{2{,}5 \cdot 100 \cdot (0{,}9479)^{2,5}}{100 \cdot (0{,}9479)^{2,5}} = 2{,}5 \text{ anni}$$

TCF

C = 1000€
TAN = 15%
n=1,5 anni
Cedole trimestrali
i = 5,5%

Tasso cedolare = TAN/(numero cedole anno) = 15%/4 = 3,75%
Cedola = tasso cedolare * valore nominale = 3,75% * 1.000 = 37,5€

Schematicamente quindi si ha :
$\{-P;37{,}5;37{,}5;37{,}5;37{,}5;37{,}5;(37{,}5+1.000)\}/\{0;1,2,3,4,5,6\}$
{importi in euro}/{tempi in trimestri}

Per determinare il prezzo del TCF si imposta la relazione di equità,

$$P_{TCF} = I \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} + C \cdot v^n$$

Il tempo è espresso in trimestri, quindi innanzitutto occorre calcolare il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo i=5,5%

$$i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1 = (1+0{,}05)^{1/4} - 1 = 0{,}0135 = 1{,}35\% \text{ da cui}$$

$$v = \frac{1}{1+i_{1/4}} = 0{,}9867$$

Sostituendo i valori si ricava:

$$P_{TCF} = 37{,}5 \cdot 0{,}9867 \cdot \frac{1-0{,}9867^6}{1-0{,}9867} + 1000 \cdot 0{,}9867^6 = 1137{,}59 \text{ euro.}$$

$$SMA_{TCF} = \frac{1 \cdot 37{,}5 + 2 \cdot 37{,}5 + 3 \cdot 37{,}5 + 4 \cdot 37{,}5 + 5 \cdot 37{,}5 + 6 \cdot (37{,}5 + 1000)}{37{,}5 + 37{,}5 + 37{,}5 + 37{,}5 + 37{,}5 + (37{,}5 + 1000)} = 5{,}54 \text{ trimestri} = 1{,}39 \text{ anni}$$

$$D_{TCF} = \frac{1 \cdot 37{,}5 \cdot 0{,}9867^1 + 2 \cdot 37{,}5 \cdot 0{,}9867^2 + 3 \cdot 37{,}5 \cdot 0{,}9867^3 + 4 \cdot 37{,}5 \cdot 0{,}9867^4 + 5 \cdot 37{,}5 \cdot 0{,}9867^5 + 6 \cdot (37{,}5 + 1000) \cdot 0{,}9867^6}{37{,}5 \cdot 0{,}9867^1 + 37{,}5 \cdot 0{,}9867^2 + 37{,}5 \cdot 0{,}9867^3 + 37{,}5 \cdot 0{,}9867^4 + 37{,}5 \cdot 0{,}9867^5 + (37{,}5 + 1000) \cdot 0{,}9867^6} = 5{,}52 \text{ trimestri}$$

=1,38 anni

b) A fronte di un portafoglio Z composto da quote dei due titoli descritti in precedenza, calcolare la Variazione Percentuale del Prezzo di tale portafoglio a fronte della variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi = 0,075 dopo 1 bimestre. Descrivere come cambia il valore del portafoglio in seguito alla variazione di tasso.

Alfa = 200
P_{TCN} = 87,5 €
D_{TCN} = 2,5 anni
Beta = 5
P_{TCF} = 1137,59€
D_{TCF} = 1,38 anni

$$D(0,z) = \frac{\alpha P_{TCN} \cdot D(0,TCN) + \beta \cdot P_{TCF} \cdot D(0,TCF)}{\alpha P_{TCN} + \beta \cdot P_{TCF}} = \frac{200 \cdot 87{,}5 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 1.137{,}59 \cdot 1{,}38}{200 \cdot 87{,}5 + 5 \cdot 1.137{,}59} = 2{,}225 \, anni$$

La variazione di prezzo del portafoglio si ottiene sfruttando la relazione seguente :

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(t,z) \cdot \Delta i$$

Per cui è necessario innanzitutto calcolare la duration del portafoglio dopo un bimestre:

$$D(1/6, z) = 2{,}225 - 1/6 = 2{,}059 \; anni$$

Pertanto, a fronte di una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi = 0,075 dopo 1 bimestre, la variazione percentuale del prezzo del portafoglio risulta pari a :

$$\frac{\Delta W(t,z)}{W(t,z)} = -\frac{1}{1+0{,}055} \cdot 2{,}059 \cdot 0{,}075 = -0{,}14634$$

In seguito alla variazione di tasso (variazione positiva, il tasso aumenta), il valore del portafoglio diminuisce del 14,634% .