**MATEMATICA FINANZIARIA 1**
PROVA SCRITTA DEL **17 NOVEMBRE 2009**
**ECONOMIA AZIENDALE**

## ESERCIZIO 1

Un individuo contrae un prestito di 15.000 € da rimborsare mediante 6 rate annuali costanti posticipate al tasso annuo del 5,5%. Dopo il pagamento della quarta rata, si verifica una variazione del tasso annuo composto che diventa pari al 4% annuo ed il debito residuo viene rimborsato mediante il sistema d'ammortamento a quote capitali costanti.

a) Si costruisca il piano d'ammortamento per l'operazione finanziaria complessiva, tenendo conto della variazione del tasso d'interesse avvenuta dopo il pagamento della quarta rata.

b) Si determini il T. I. R. dell'operazione finanziaria complessiva.

Soluzioni:

a)
Un individuo contrae un prestito di 15.000 € da rimborsare mediante 6 rate annuali costanti posticipate al tasso annuo del 5,5%. → innanzitutto si deve ricavare la rata costante posticipata di un piano di ammortamento a rata costante (francese) di durata 6 periodi.

Si imposta la relazione di equità $15.000 = R \cdot \frac{1-v^6}{i}$, da cui si ricava la rata annua costante posticipata $R = \frac{15.000}{\left[\frac{1-v^6}{i}\right]} = 3.002{,}68$, con $v = \frac{1}{1+i}$

Si sviluppa il piano francese fino all'epoca 4, in modo da avere conoscere il debito residuo $DR_4$.
Dopo il pagamento della quarta rata si verifica infatti una variazione di tasso e il debito residuo viene rimborsato a quota costante, il che significa che $C_5 = C_6 = DR_4 / 2$

$I_5 = 4\% * DR_4$ , $R_5 = C_5 + I_5$
$I_6 = 4\% * DR_5$ , $R_6 = C_6 + I_6$

| k | Rk | Ck | Ik | DRk |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 15000,00 |
| 1 | 3002,68 | 2177,68 | 825,00 | 12822,32 |
| 2 | 3002,68 | 2297,46 | 705,23 | 10524,86 |
| 3 | 3002,68 | 2423,82 | 578,87 | 8101,04 |
| 4 | 3002,68 | 2557,13 | 445,56 | 5543,92 |
| 5 | 2993,71 | 2771,96 | 221,76 | 2771,96 |
| 6 | 2882,84 | 2771,96 | 110,88 | 0,00 |

b)
L'operazione finanziaria complessiva è quindi la seguente:

| k | Fk |
|---|---|
| 0 | 15000,00 |
| 1 | -3002,68 |
| 2 | -3002,68 |
| 3 | -3002,68 |
| 4 | -3002,68 |
| 5 | -2993,71 |
| 6 | -2885,80 |
| TIR Annuo | 5,31% |

Il TIR si può ricavare attraverso il metodo delle corde, partendo dalla relazione di equità :

$$15.000 = 3.002{,}68 \cdot v + 3.002{,}68 \cdot v^2 + 3.002{,}68 \cdot v^3 + 3.002{,}68 \cdot v^4 + 2.993{,}71 \cdot v^5 + 2.885{,}80 \cdot v^6$$

Che in forma più compatta (i primi quattro termini altro non sono che una rendita posticipata di quattro rate costanti) risulta pari a :

$$15.000 = 3.002{,}68 \cdot v \cdot \frac{1-v^4}{1-v} + 2.993{,}71 \cdot v^5 + 2.885{,}80 \cdot v^6$$

I PASSO:

*Si pone* $f(v) = 3.002{,}68 \cdot v \cdot \frac{1-v^4}{1-v} + 2.993{,}71 \cdot v^5 + 2.885{,}80 \cdot v^6$ *si risolve l'equazione trovando due valori :*

- $v_1$ tale che $f(v_1) < P'$
- $v_m$ tale che $f(v_m) > P'$

II PASSO:
*Si determina il valore di* $v_2$ *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P' - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

III STEP:
*Si fissa un livello di errore accettabile* $\varepsilon = 0{,}0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

Il T.I.R. sarà dato da:

$$i^* = \frac{1}{v_2} - 1 = 5{,}31\% \text{ annuale}$$

**ESERCIZIO 2**

Si vuole acquistare un portafoglio formato da ALFA quote del Titolo A e da BETA quote del Titolo B, dove:

- Titolo A: TCF quotato alla pari con prezzo pari a 1.000 Euro, cedola semestrale, tasso nominale annuo del 10% e scadenza a 2,5 anni;

- Titolo B: prezzo pari a 1.000 Euro, pagamento di un importo pari ad *S* al tempo t=1,5 anni, pagamento di un importo pari ad 3*S* al tempo t=4 anni.

Sapendo che sul mercato vige un tasso di interesse pari al TIR del titolo A, determinare :

1. l'importo S del Titolo B;
2. il valore di ALFA e BETA affinchè il valore del portafoglio sia pari a €10.000 e la duration di portafoglio risulti uguale a 2,5.
3. la variazione percentuale del prezzo del portafoglio qualora dovesse intervenire una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi=+ 0,002 dopo un trimestre.

1. **Calcolare l'importo S del Titolo B;**

Innanzitutto ricaviamo il TIR del titolo A:
sapendo che il tasso nominale annuo 10%, tasso cedolare = (tasso nominale annuo) / 2 = 5% essendo il titolo quotato alla pari il tasso cedolare coincide con il tir del titolo.

Quindi
TIR A su base semestrale = 5%
TIR A su base annua = (1+0,05)^2 – 1 = 10,25%

L'operazione finanziaria che descrive il titolo B è la seguente:

$1000 = S \cdot (1+0{,}1025)^{-1{,}5} + 3S \cdot (1+0{,}1025)^{-4}$ da cui attraverso semplici passaggi algebrici si ricava S come segue:

$$S = \frac{1000}{1{,}1025^{-1{,}5} + 3 \cdot 1{,}1025^{-4}} = 345{,}5$$

2. **il valore di ALFA e BETA affinchè il valore del portafoglio sia pari a €10.000 e la duration di portafoglio risulti uguale a 2,5.**

E' necessario calcolare prima la duration dei due titoli

$$\text{TITOLO A: } D(0,TCF) = \frac{\sum_{K=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$$

Calcoliamo la cedola e il fattore di attualizzazione corrispondente al tasso del 5% semestrale:

$$I = 0{,}05 \cdot 1000 = 50$$
$$v = (1+0{,}05)^{-1} = 0{,}95238$$

$$D(0,TCFA) = \frac{1 \cdot 50 \cdot 0{,}95238 + 2 \cdot 50 \cdot 0{,}95238^2 + 3 \cdot 50 \cdot 0{,}95238^3 + 4 \cdot 50 \cdot 0{,}95238^4 + 5 \cdot (50+1000) \cdot 0{,}95238^5}{50 \cdot 0{,}95238 + 50 \cdot 0{,}95238^2 + 50 \cdot 0{,}95238^3 + 50 \cdot 0{,}95238^4 + (50+1000) \cdot 0{,}95238^5} = 4{,}55$$

semestri = 2,27 anni

Per calcolare la duration del titolo B dobbiamo calcolare prima il fattore di attualizzazione corrispondente al 10,25% annuo:

$$v = (1+0{,}1025)^{-1} = 0{,}9071$$

$$D(0,TITB) = \frac{1{,}5 \cdot 345{,}5 \cdot 0{,}9071^{1,5} + 4 \cdot (3 \cdot 345{,}5) \cdot 0{,}9071^4}{345{,}5 \cdot 0{,}9071^{1,5} + (3 \cdot 345{,}5) \cdot 0{,}9071^4} = 3{,}26 \text{ anni}$$

Per ricavare α e β si deve impostare un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \alpha \cdot P_{TCFA} + \beta \cdot P_{TITB} = 10.000 \\ \dfrac{\alpha \cdot P_{TCFA} \cdot D(0,TCFA) + \beta \cdot P_{TITB} \cdot D(0,TITB)}{10.000} = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7{,}66 \\ \beta = 2{,}34 \end{cases}$$

3. **la variazione percentuale del prezzo del portafoglio qualora dovesse intervenire una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi=+ 0,002 dopo un trimestre.**

La duration del portafoglio risulta pari a:

$$D(0,z) = \frac{\alpha P_{TCFA} \cdot D(0,TCFA) + \beta P_{TitoloB} \cdot D(0,TitoloB)}{\alpha P_{TCFA} + \beta P_{TitoloB}} = 2{,}5 \text{ anni}$$

$$\mathrm{D}(t,z) = \mathrm{D}(0,z) - t = 2{,}5 - \frac{3}{12} = 2{,}25 \text{ anni}$$

*Siamo ora in grado di calcolare la variazione percentuale del prezzo del portafoglio:*

$$\Delta \mathrm{W}(t,z) = -\frac{1}{1+i} \cdot \mathrm{D}(t,z) \cdot \Delta i = -\frac{1}{1{,}1025} \cdot 2{,}25 \cdot 0{,}002 = -0{,}41\%$$

**MATEMATICA FINANZIARIA 1**
PROVA SCRITTA DEL **17 NOVEMBRE 2009**
**ECONOMIA AZIENDALE**

## ESERCIZIO 1

Un individuo contrae un prestito di 15000 € da rimborsare mediante il pagamento di 6 rate mensili costanti posticipate più il pagamento di una somma di denaro pari a 5000 € da pagare all'epoca t= 7 mesi.

a) Si determini l'ammontare della rata da versare usando un tasso annuo del 7%.

b) Supponendo che, al posto della somma di 5000 € da versare all'epoca t= 7 mesi, l'individuo debba versare 6000 all'epoca t = 6 mesi, si determini il T. I. R. dell'operazione finanziaria (a tal fine si utilizzi la rata calcolata al punto precedente).

a)
Si imposta la relazione di equità

$$15.000 = R \cdot v + R \cdot v^2 + R \cdot v^3 + R \cdot v^4 + R \cdot v^5 + R \cdot v^6 + 5.000 \cdot v^7$$

Con $v = \dfrac{1}{1 + i_{1/12}}$

$$i_{1/12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1+0{,}07)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00565 = 0{,}565\%$$

Da questa attraverso semplici passaggi si ricava l'ammontare della rata :

$$15.000 = R \cdot \frac{1 - v^6}{i_{\frac{1}{12}}} + 5.000 \cdot v^7$$

$$15.000 - 5.000 \cdot v^7 = R \cdot \frac{1 - v^6}{i_{\frac{1}{12}}}$$

$$R = \frac{\left[15.000 - 5.000 \cdot v^7\right]}{\left[\dfrac{1 - v^6}{i_{\frac{1}{12}}}\right]} = 1732{,}69$$

b)
Si imposta la relazione di equità

$$15.000 = R \cdot v + R \cdot v^2 + R \cdot v^3 + R \cdot v^4 + R \cdot v^5 + R \cdot v^6 + 6.000 \cdot v^6$$

Ovvero

$$15.000 = 1732{,}69 \cdot v + 1732{,}69 \cdot v^2 + 1732{,}69 \cdot v^3 + 1732{,}69 \cdot v^4 + 1732{,}69 \cdot v^5 + 1732{,}69 \cdot v^6 + 6.000 \cdot v^6$$

Equivalente a

$$15.000 = 1732{,}69 \cdot v \cdot \frac{1 - v^6}{1 - v} + 6.000 \cdot v^6$$

E si procede con il metodo delle corde

I PASSO:

*Si pone* $f(v) = 1732{,}69 \cdot v \cdot \frac{1 - v^6}{1 - v} + 6.000 \cdot v^6$ *si risolve l'equazione trovando due valori :*

- $v_1$ tale che $f(v_1) < P'$
- $v_m$ tale che $f(v_m) > P'$

II PASSO:

*Si determina il valore di* $v_2$ *grazie alla formula della retta passante per due punti:*

$$v_2 = v_1 + \frac{P' - f(v_1)}{f(v_m) - f(v_1)} \cdot (v_m - v_1)$$

III STEP:

*Si fissa un livello di errore accettabile* $\varepsilon = 0{,}0001$ *tale che* $f(v_2+\varepsilon) > P$:

Il T.I.R. sarà dato da:

$$i^*_{1/12} = \frac{1}{v_2} - 1 = 2{,}05\% \text{ mensile}$$

$$i^* = \left(1 + i^*_{1/12}\right)^{12} - 1 = 27{,}61\% \text{ annuo}$$

**<u>ESERCIZIO 2</u>**

Si vuole acquistare un portafoglio formato da 4 quote del Titolo A e da BETA quote del Titolo B, dove:

- Titolo A: TCF quotato alla pari con prezzo pari a 1.000 Euro, cedola quadrimestrale, tasso nominale annuo del 12% e scadenza a 2 anni;

- Titolo B: prezzo pari a 1.000 Euro, pagamento di un importo pari ad *S* al tempo t= 6 mesi, pagamento di un importo pari ad 2*S* al tempo t=2 anni.

Sapendo che sul mercato vige un tasso di interesse pari al TIR del titolo A, determinare :

1. l'importo S del Titolo B;

2. la duration di secondo ordine del titolo B;
3. il valore di BETA affinchè la duration di portafoglio risulti uguale a 1,7.
4. la variazione percentuale del prezzo del portafoglio qualora dovesse intervenire una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi=+ 0,03 dopo un bimestre.

**1. Calcolare l'importo S del Titolo B;**

Innanzitutto ricaviamo il TIR del titolo A:
sapendo che il tasso nominale annuo 12%, tasso cedolare = (tasso nominale annuo) / (3 cedole) = 12%/3 = 4% essendo il titolo quotato alla pari il tasso cedolare coincide con il tir del titolo.

Quindi
TIR A su base quadrimestrale = 4%
TIR A su base annua = (1+0,04)^3 – 1 = 12,49%

L'operazione finanziaria che descrive il titolo B è la seguente:

$1000 = S \cdot (1+0{,}1249)^{-0{,}5} + 2S \cdot (1+0{,}1249)^{-2}$ da cui attraverso semplici passaggi algebrici si ricava S come segue:

$$S = \frac{1000}{1{,}1249^{-0{,}5} + 2 \cdot 1{,}1249^{-2}} = 396{,}3$$

**2.la duration di secondo ordine del titolo B;.**

$$D^2(0, TITOLOB) = \frac{\sum_{K=1}^{m} (t_k)^2 \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$$

$$D^2(0, TITB) = \frac{(0{,}5)^2 \cdot 396{,}3 \cdot 0{,}889^{0{,}5} + (2)^2 \cdot (2 \cdot 396{,}3) \cdot 0{,}889^2}{396{,}3 \cdot 0{,}889^{0{,}5} + (2 \cdot 396{,}3) \cdot 0{,}889^2} = 2{,}60 \text{ (anni)}^2$$

**3. il valore di BETA affinchè la duration di portafoglio risulti uguale a 1,7.**

E' necessario calcolare prima la duration dei due titoli

TITOLO A: $D(0, TCF) = \frac{\sum_{K=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{P}$

Calcoliamo la cedola e il fattore di attualizzazione corrispondente al tasso del 4% quadrimestrale:

$I = 0{,}04 \cdot 1000 = 40$
$v = (1+0{,}04)^{-1} = 0{,}9615$

$$D(0, TCFA) = \frac{1 \cdot 40 \cdot 0{,}9615 + 2 \cdot 40 \cdot 0{,}9615^2 + 3 \cdot 40 \cdot 0{,}9615^3 + 4 \cdot 40 \cdot 0{,}9615^4 + 5 \cdot 40 \cdot 0{,}9615^5 + 6 \cdot (40+1000) \cdot 0{,}9615^6}{40 \cdot 0{,}9615 + 40 \cdot 0{,}9615^2 + 40 \cdot 0{,}9615^3 + 40 \cdot 0{,}9615^4 + 40 \cdot 0{,}9615^5 + (40+1000) \cdot 0{,}9615^6} = 5{,}45$$

5, 45 quadrimestri = 1,82 anni

Per calcolare la duration del titolo B dobbiamo calcolare prima il fattore di attualizzazione corrispondente al 12,49% annuo:

$$v = (1 + 0{,}1249)^{-1} = 0{,}889$$

$$D(0, TITB) = \frac{(0{,}5) \cdot 396{,}3 \cdot 0{,}889^{0{,}5} + (2) \cdot (2 \cdot 396{,}3) \cdot 0{,}889^{2}}{396{,}3 \cdot 0{,}889^{0{,}5} + (2 \cdot 396{,}3) \cdot 0{,}889^{2}} = 1{,}44 \text{ anni}$$

Per ricavare β si deve impostare la formula della duration di portafoglio:

$$D(0, z) = \frac{4 \cdot P_{TCFA} \cdot D(0, TCFA) + \beta \cdot P_{TITB} \cdot D(0, TITB)}{4 \cdot P_{TCFA} + \beta \cdot P_{TITB}} = 1{,}7$$

$$\frac{4 \cdot 1000 \cdot 1{,}82 + \beta \cdot 1000 \cdot 1{,}44}{4 \cdot 1000 + \beta \cdot 1000} = 1{,}7$$

Da cui β = 1,80

4. **la variazione percentuale del prezzo del portafoglio qualora dovesse intervenire una variazione del tasso annuo di interesse pari a Δi=+ 0,03 dopo un bimestre.**

La duration del portafoglio risulta pari a:

$$D(0, z) = 1{,}7 \text{ anni}$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{t}, \mathrm{z}) = \mathrm{D}(0, \mathrm{z}) - \mathrm{t} = 1{,}7 - \frac{2}{12} = 1{,}533 \text{ anni}$$

*Siamo ora in grado di calcolare la variazione percentuale del prezzo del portafoglio:*

$$\Delta \mathrm{W}(\mathrm{t}, \mathrm{z}) = -\frac{1}{1 + \mathrm{i}} \cdot \mathrm{D}(\mathrm{t}, \mathrm{z}) \cdot \Delta \mathrm{i} = -\frac{1}{1{,}1249} \cdot 1{,}533 \cdot 0{,}03 = -4{,}09\%$$