MATEMATICA FINANZIARIA II
PROVA SCRITTA DEL 17 LUGLIO 2007

ESERCIZIO 1

Si consideri un mercato ideale in cui siano disponibili 5 TCN a pronti sullo scadenzario {0, 3, 4, 5, 6, 9} bimestri con valore nominale 250€ e prezzi pari rispettivamente a 248€, 247,5€, 246,5€, 245€ e 243€.

a) Si determini la struttura dei tassi d'interesse a pronti e a termine, esprimendo tali tassi su base annua.

Tassi a pronti:
i(0;3)=1,62%; i(0;4)=1,52%; i(0;5)=1,7%; i(0;6)=2,04%; i(0;9)=1,91%

Tassi a termine
i(0;0;3)=1,62%; i(0;3;4)=1,22%; i(0;4;5)=2,46%; i(0;5;6)=3,73%;i(0;6;9)=1,65%

b) Si ipotizzi che al tempo t=0 sia possibile stipulare la compravendita di un TCN con le seguenti caratteristiche: consegna al tempo *t'*=6 mesi; scadenza in *t''*=10 mesi; valore nominale C=1000€ e prezzo P=995€. Si stabilisca se è possibile realizzare arbitraggi non rischiosi tramite la compravendita di un'unità del suddetto TCN a termine e di opportune quantità dei TCN a pronti disponibili sul mercato, determinando, in caso affermativo, la relativa strategia ed il profitto di arbitraggio.

Il TCN di cui al punto b) viola il teorema dei prezzi impliciti. Infatti si ha che (tempo espresso in bimestri):

$$v(0;3;5)=0{,}995=\frac{995€}{1000€} > 0{,}99395 = \frac{246{,}5€/250€}{248€/250€} = \frac{v(0;5)}{v(0;3)}$$

Utilizzando i TCN presenti nel mercato è possibile realizzare la seguente strategia di arbitraggio:

a) Vendita a pronti allo scoperto in t=0 di 3,98 unità di TCN con scadenza 3 bimestri;
b) Acquisto a pronti in t=0 di 4 unità di TCN con scadenza 5 bimestri;
c) Vendita a termine allo scoperto di un'unità del TCN a termine di cui al punto b).

Il tutto è riepilogato nella seguente tabella dei PAYOFF:

	Quantità comprate	t=0	t=3	t=5
TCN(0,3)	-3,98	987,04	-995	
TCN(0,5)	4	-986		1000
TCN(0,3,5)	-1		995	-1000
	Profitto	**1,04**	0	0

c) Si consideri un TCF con cedole semestrali e scadenza 18 mesi. Ipotizzando che il valore del suddetto TCF in t=0, in base alla struttura per scadenza vigente, sia pari a 5500€, calcolare il tasso cedolare affinché il TCF risulti quotato alla pari.

Sia C il valore nominale del TCF. Tale tasso (detto di "parità"), che indichiamo con i_p, si determina risolvendo l'equazione di I grado:
$C= i_p*C*(v(0;1)+v(0;2)+v(0;3))+C*v(0;3)$
da cui si ottiene $i_p = 0{,}951\%$

ESERCIZIO 2

Il signor Verdi intende valutare le tre seguenti alternative per investire interamente il capitale di 8500€ in suo possesso per un anno:

- **Titolo A, caratterizzato da rendimenti annui distribuiti uniformemente nell'intervallo (-3.5% ,15%)**
- **Titolo B, i cui rendimenti annui sono distribuiti secondo la seguente variabile casuale:** $X_2 = \begin{cases} -2\% & \text{con probabilità } 0{,}2 \\ 0\% & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ +5\% & \text{con probabilità } 0{,}5 \end{cases}$
- **Titolo C, TCN con scadenza ad un anno, prezzo P=485€ e valore nominale C=500€.**

a) Valutare le tre alternative secondo il criterio della dominanza stocastica;

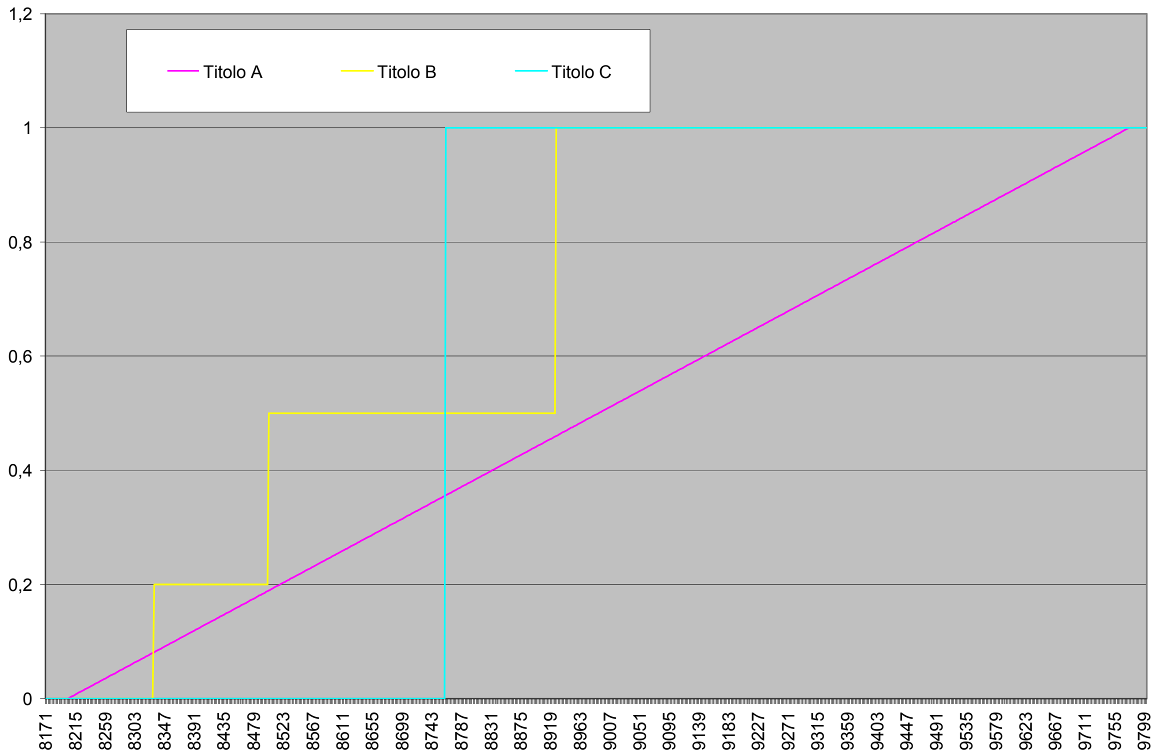
Osserviamo gli investimenti suddetti, dato che il Sig. Verdi dispone di un capitale di 8500€, equivalgono, in termini di ricchezza, alle seguenti Variabili casuali (VC):

Titolo A: Variabile Casuale Y_1 con distribuzione uniforme nell'intervallo (8202,5€; 9775€)

Titolo B: VC discreta $Y_2 = \begin{cases} 8330 & \text{con probabilità } 0{,}2 \\ 8500 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ 8925 & \text{con probabilità } 0{,}5 \end{cases}$

Titolo C: Investendo tutto il capitale pari a 8500€ nell'acquisto di TCN si ottengono 17,52=8500€/485€ unità di TCN che tra un anno daranno diritto ad un rimborso di 17,52*500€=8762,88€. Pertanto l'alternativa data dal titolo C è una variabile casuale discreta
$Y_3=\{8762{,}88 \quad \text{con probabilità } 1\}$.

E' facile giustificare che le tre alternative non sono confrontabili tramite il criterio della dominanza stocastica osservando il grafico seguente:



b) Supponendo che il signor Verdi abbia funzione di utilità $u(x) = 3\sqrt{x} + 50$, stabilire l'ordinamento delle preferenze delle tre alternative secondo il criterio dell'utilità attesa, determinando, altresì, il grado di avversione al rischio del sig. Verdi (tramite l'indice di Arrow-Pratt).

Per determinare l'utilità attesa di Y_1 calcoliamo prima

$$F(x) = \int 3\sqrt{x} + 50dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 50\int dx = 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 50x + c = 2x^{\frac{3}{2}} + 50x + c = 2\sqrt{x^3} + 50x + c$$

Quindi si ha E(u(Y_1))= $\dfrac{F(b) - F(a)}{b - a} = \dfrac{F(9775) - F(8202,5)}{9775 - 8202,5} = 334,336$

Il calcolo dell'utilità attesa delle altre due alternative è immediato:
E(u(Y_2))=329,445
E(u(Y_3))=330,831
Pertanto in base al criterio dell'utilità attesa il Sig. Verdi preferirà l'investimento A, quindi l'investimento C e per ultimo l'investimento B.
Infine calcolando l'indice di Arrow-Pratt per la funzione di utilità del Sig. Verdi si ottiene:
$r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = \dfrac{1}{2x}$>0 (dato che x>0 è la ricchezza posseduta dal decisore). Possiamo affermare che il soggetto è avverso al rischio. Inoltre, in relazione alla ricchezza posseduta dal Sig. Verdi si ha che $r(8500) = 0,00005882$.

c) **(solo nella variante del CdL di Economia) Determinare l'equivalente certo delle tre alternative per il Sig. Verdi. Confrontare l'equivalente certo di ciascuna alternativa con il valore medio e motivare eventuali differenze.**

Per trovare l'equivalente certo invertiamo la funzione di utilità. Ponendo $y = 3\sqrt{x} + 50$ si ha che $x = \left[\frac{(y-50)}{3}\right]^2$. Sostituendo al posto di y nell'espressione precedente i valori delle utilità attese trovate in precedenza si ricava che:
L'equivalente certo di Y_1 è pari a 8983,01;
L'equivalente certo di Y_2 è pari a 8676,64;
L'equivalente certo di Y_3 è pari a 8762,88;

Inoltre si ha che $E(Y_1)$=8988,75€; $E(Y_2)$=8678,5€; $E(Y_3)$=8762,88€.

Si osservi che, poiché il sig. Verdi è avverso al rischio, il valore atteso di un'alternativa è sempre maggiore del corrispondente equivalente certo, tranne per l'investimento C in cui valore atteso ed equivalente certo coincidono (trattandosi di una variabile casuale discreta con un'unica determinazione, cioè di un evento certo).