MATEMATICA FINANZIARIA 2
PROVA SCRITTA DEL **11 SETTEMBRE 2007**
ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

a) Su un mercato ideale viene stimata, tramite i prezzi di TCN unitari, la seguente struttura per scadenza dei tassi a pronti:

i(0,1)=4,3% ; i(0,2)=4,8% ; i(0,3)=5% ; i(0,4)=5,5% ; i(0,5)= 6,2%;

essendo i tempi misurati in semestri ed i tassi espressi su base annua.
Si determini la struttura per scadenza dei prezzi a pronti e dei tassi a termine.

Per nostra comodità, dato che le formule sono espressi in anni, riconduciamo anche lo scadenzario in anni:

$$\{0.5,1,1.5,2,2.5\}$$

Dunque possiamo riscrivere i tassi nel modo seguente:

i(0,0.5) = 4.3%   i(0,1) = 4.8%   i(0,1.5) = 5%   i(0,2) = 5.5% i(0,2.5) = 6.2%

Dalla S.P.S. dei tassi a pronti determiniamo la S.P.S. dei tassi a termine attraverso la seguente formula:

$$i(t,t_{K-1},t_K) = [1+i(t,t_{K-1})] \cdot \left[\frac{1+i(t,t_{k-1})}{1+i(t,t_K)}\right]^{\frac{t_K-t}{t_{K-1}-t_K}} - 1$$

i(0,0,0.5) = i(0,0.5) = 0.043 $i(0,0.5,1) = [1+i(0,0.5)] \cdot \left[\frac{1+i(0,0.5)}{1+i(0,1)}\right]^{\frac{1}{0.5-1}} - 1 = 0.05302$

i(0,1,1.5) = 0.05401   i(0,1.5,2) = 0.07014   i(0,2,2.5) = 0.09047

Determiniamo ora la S.P.S. dei prezzi a pronti:

$$v(t,t_K) = [1+i(t,t_K)]^{-(t_K-t)}$$

$v(0,0.5) = [1+i(0,0.5)]^{-0.5} = 0.979169$ v(0,1) = 0.954198   v(0,1.5) = 0.929429
v(0,2) = 0.898452   v(0,2.5) = 0.860377

b) Si consideri al tempo t=0 un BTP (TCF) a pronti quotato alla pari con tasso nominale annuo i=12%, scadenza un anno, valore nominale 500€ e cedole semestrali. Dire se è possibile realizzare un arbitraggio tramite la compravendita del suddetto BTP e di opportune quantità di TCN unitari di cui al punto a) in maniera da ottenere un profitto di arbitraggio, in t=0, pari a 250€.

Valore della cedola: $I = \dfrac{0.12 \cdot 500}{2} = 30$

L'operazione finanziaria che descrive il TCF è quindi: {30, 530 }/ {0.5, 1} ANNI
Il prezzo che non consente arbitraggi è quello determinato secondo il teorema della linearità del prezzo:

$$v(t,\underline{x}) = \sum_{J=1}^{N} x_J \cdot v(t,t_J)$$

V(0, BTP) = 535.10 che è diverso dal prezzo effettivo (500€) quindi è possibile effettuare arbitraggi.

<u>STRATEGIE DI ARBITRAGGIO</u>:
In t=0:

A) ACQUISTO α QUOTE DEL BTP
B) VENDO ALLO SCOPERTO α·30 UNITÀ DI TCNU CON SCADENZA 0.5;
C) VENDO ALLO SCOPERTO α·530 UNITÀ DI TCNU CON SCADENZA 1.

	0	0.5	1
A	-α500	+30α	+530α
B	+α·30·v(0,0.5)	-30α	
C	+α·530·v(0,1)		-530α
PROFITTO ARBITRAGGIO	250	0	0

Impostiamo la condizione secondo cui il profitto d'arbitraggio deve essere pari a 250€, determinando così il valore dell'incognita α:

-α·500+α·30·v(0,0.5) +α·530·v(0,1) = 250
$\alpha(-500 + 30 \cdot 0.979169 + 530 \cdot 0.954198) = 250$
$\alpha = 7.122505$
Quindi sarà necessario acquistare 7.122505 unità di BTP, vendere 213.675 unità di TCNU con scadenza 0.5 e vendere 3774.928 unità di TCNU con scadenza 1.

c) Si ipotizzi che sul mercato siano disponibili due TCN con scadenza rispettivamente pari ad un anno e 2,5 anni e valore nominale rispettivamente pari a 200€ e 1000€, tramite i quali non sia possibile realizzare arbitraggi. Determinare le quote di tali TCN da acquistare affinché sia immunizzata una passività di 150.000€ al tempo t=2 anni.

Il prezzo di un TCN non unitario che non consente arbitraggi è quello determinato con il teorema dell'indipendenza dall'importo:

$$v(t,x_s) = x_s \cdot v(t,s)$$

P = V(0,TCN $_A$) = 200 · v(0,1) = 190.8396
D(0, TCN $_A$) = 1 anno

P = V(0,TCN $_B$) = 1000 · v(0,2.5) = 860.377
D(0,TCN $_B$) = 2.5 anni

Se indichiamo la passività con il simbolo $\underline{y}$, allora:
V(0, $\underline{y}$) = 150000 · v(0,2) = 134767.8
D(0, $\underline{y}$) = 2 anni
Impostiamo dunque le due condizioni del teorema di Fisher-Weil:

$$\begin{cases} V(0,\underline{X}) = V(0,\underline{Y}) \\ D(0,\underline{X}) = D(0,\underline{Y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 190.8396 + \beta \cdot 860.377 = 134767.8 \\ \dfrac{\alpha \cdot 190.8396 \cdot 1 + \beta \cdot 860.377 \cdot 2.5}{134767.8} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 235.3908 \\ \beta = 104.4257 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

Il signor Rossi intende investire per un anno un capitale di 12850€. A tal fine egli valuta le seguenti alternative:

- **Alternativa A: Investire per i primi sei mesi nell'investimento aleatorio**

$$X_1 = \begin{cases} -2\% \text{ semestrale} & \text{con probabilità } 0{,}1 \\ +3\% \text{ semestrale} & \text{con probabilità } 0{,}6 \\ +12\% \text{ semestrale} & \text{con probabilità } 0{,}3 \end{cases}$$

  e per i successivi sei mesi mantenere il capitale nel suo conto corrente al 4,5% annuo;
- **Alternativa B: investire in X_2, variabile casuale con rendimenti annui distribuiti uniformemente nell'intervallo (-3.5%, +16%).**
- **Alternativa C: mantenere il capitale per un anno nel conto corrente al 4,5% annuo.**

a) **Dopo aver descritto le variabili casuali che esprimono la ricchezza del Sig. Rossi in t=1 anno, stabilire l'ordine delle preferenze delle tre alternative secondo il criterio media-varianza.**

Innanzitutto descriviamo le tre variabili casuali che indicano il valore aleatorio della ricchezza al tempo t=1 anno:

$$X_1 = \begin{cases} 12850 \cdot (1-0.02)^1 \cdot (1+0.045)^{0.5} & 0.1 \\ 12850 \cdot (1+0.03)^1 \cdot (1+0.045)^{0.5} & 0.6 \\ 12850 \cdot (1+0.12)^1 \cdot (1+0.045)^{0.5} & 0.3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \begin{cases} 12873.22 & 0.1 \\ 13530.22 & 0.6 \\ 14712.26 & 0.3 \end{cases}$$

X_2 uniforme in (12400.25, 14906) $\qquad$ $X_3 = \{\ 13428.25 \quad 1$

Ora applichiamo il criterio richiesto:

VARIABILE CASUALE X_1:

$$X_1^{\ 2} = \begin{cases} 12873.22^2 & 0.1 \\ 13530.22^2 & 0.6 \\ 14712.26^2 & 0.3 \end{cases}$$

$E(X_1) = 13819.012$ $\qquad$ $E(X_1^{\ 2}) = 191344022.3$

$$Var(X_1) = E(X_1^{\ 2}) - E(X_1)^2$$
$$= 378929.64$$

VARIABILE CASUALE X_2:

$$E(X_2) = \frac{12400.25 + 14906}{2} = 13653.13$$
$$Var(X_2) = \frac{(14906 - 12400.25)^2}{12} = 523231.92$$

VARIABILE CASUALE X_3:

E(X_3) = 13428.25
Var (X_3) = 0

CONFRONTO SECONDO IL CRITERIO MEDIA-VARIANZA:

$X_1 \ X_2$ $\qquad$ $E(X_1) > E(X_2)$ $\quad \Rightarrow \quad X_1 \succ X_2$
$\qquad$ Var (X_1) < Var (X_2)

$X_1 \ X_3$ $\qquad$ $E(X_1) > E(X_3)$ $\quad \Rightarrow$ Non confrontabili
$\qquad$ Var (X_1) > Var (X_3)

$X_2 \ X_3$ $\qquad$ $E(X_2) > E(X_3)$ $\quad \Rightarrow$ Non confrontabili
$\qquad$ Var (X_2) > Var (X_3)

b) Ipotizzando che il signor Rossi abbia funzione di utilità

$$u(x) = \frac{1}{2}\log x + 0{,}04x + 20$$

stabilire l'ordine delle preferenze secondo il criterio dell'utilità attesa.

$$U(X_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(12873.22) + 0.04(12873.22) + 20 & \\ \frac{1}{2}\log(13530.02) + 0.04(13530.02) + 20 & \text{con probabilità} \\ \frac{1}{2}\log(14712.26) + 0.04(14712.26) + 20 & \end{cases} \quad \begin{matrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{matrix}$$

$$U(X_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(13428.25) + 0.04(13428.25) + 20 & 1 \end{cases}$$

CALCOLIAMO LE UTILITA' ATTESE:

$$E(U(X_1)) = 577.52$$

$$E(U(X_2)) = \int_a^b U(x)\cdot f(x)dx = \frac{1}{2505.75}\int_{12400.25}^{14906}\frac{1}{2}\log(x) + 0.04x + 20dx$$

Per calcolare l'utilità attesa dell'alternativa X_2 calcoliamo dapprima:

$$\int\frac{1}{2}\log x + 0.04x + 20dx = \frac{1}{2}\int\log xdx + 0.04\int xdx + 20\int dx = \frac{1}{2}(x\cdot\log x - x) + 0.04\cdot\frac{x^2}{2} + 20x + c$$
$$= \frac{1}{2}\left[(x\cdot\log x - x) + 0.04x^2 + 40x\right] + c\ .$$

Ponendo $F(x) = \frac{1}{2}\left[(x\cdot\log x - x) + 0.04x^2 + 40x\right]$ e ritornando alla formula dell'utilità attesa della variabile casuale X_2**:**

$$E(U(X_2)) = \frac{1}{2505.75}\cdot\left[F(14906) - F(12400.25)\right] = 570.88$$

$$E(U(X_3)) = 561.88$$

Confronto:

$$\mathrm{E(U(X_1))} > \mathrm{E(U(X_2))} > \mathrm{E(U(X_3))} \qquad \Rightarrow \qquad X_1 \succ X_2 \succ X_3$$