MATEMATICA FINANZIARIA II

PROVA SCRITTA DEL 20 NOVEMBRE 2007

ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

In un mercato ideale viene stimata, tramite il prezzo di TCNU, la seguente struttura per scadenza dei tassi a pronti

i(0; 0,25)=2,65%   i(0; 0,5)=2,85%   i(0; 0,75)=3,05%   i(0; 1)=3,2%

essendo i tempi misurati in anni ed i tassi espressi su base annua.

a) Si calcolino la struttura per scadenza dei tassi a termine e dei prezzi a pronti;

Dalla S.P.S. dei tassi a pronti determiniamo la S.P.S. dei tassi a termine attraverso la seguente formula:

$$i(t,t_{K-1},t_K)=[1+i(t,t_{K-1})]\cdot\left[\frac{1+i(t,t_{k-1})}{1+i(t,t_K)}\right]^{\frac{t_K-t}{t_{K-1}-t_K}}-1$$

i(0,0,0.25) = i(0,0.25) = 0.0265 $i(0,0.25,0.5)=[1+i(0,0.25)]\cdot\left[\frac{1+i(0,0.25)}{1+i(0,0.5)}\right]^{\frac{0.5}{0.25-0.5}}-1=0.03050$

i(0,0.5,0.75) = 0.03451   i(0,0.75,1) = 0.03651

Determiniamo ora la S.P.S. dei prezzi a pronti:

$$v(t,t_K)=[1+i(t,t_K)]^{-(t_K-t)}$$

$v(0,0.25)=[1+i(0,0.25)]^{-0.25}=0.993483$ v(0,0.5) = 0.986048

v(0,0.75) = 0.977719   v(0,1) = 0.968992

b) Si consideri il titolo A, descritto dall'operazione finanziaria A={1500€; 2000€; 5000€}|{ 0,5; 1; 1,5} (tempo espresso in anni), con prezzo P=8100€ in t=0. Ipotizzando che sul mercato sia presente un TCNU con scadenza in T=1,5 anni, determinare il tasso di interesse i(0;1,5), da esprimere su base annua, in maniera da escludere la realizzazione arbitraggi.

$P_A=1500\cdot v(0,0.5)+2000\cdot v(0,1)+5000\cdot v(0,1.5)$

da cui si ricava $8100=1479.072+1937.984+5000\cdot x$

e quindi $x=v(0,1.5)=0.93658$

e infine $\mathrm{i}(0,1.5)=[\mathrm{v}(0,1.5)]^{-\frac{1}{1.5}}-1=0.04465$

c) Determinare le quote di TCNU con scadenza a 3 mesi e ad un anno affinché tale portafoglio possa immunizzare una passività L pari a 1.000.000€ esigibile in t=9 mesi.

TCN_A:
$P = V(0,TCN_A) = 0.993483$
$D(0, TCN_A) = 0.25$ anni

TCN_B:
$P = V(0,TCN_B) = 0.968992$
$D(0,TCN_B) = 1$ anno

Se indichiamo la passività con il simbolo $\underline{y}$, allora:
$V(0, \underline{y}) = 1000000 \cdot v(0,0.75) = 977719$
$D(0, \underline{y}) = 0.75$ anni
Impostiamo dunque le due condizioni del teorema di Fisher-Weil:

$$\begin{cases} V(0,\underline{X}) = V(0,\underline{Y}) \\ D(0,\underline{X}) = D(0,\underline{Y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0.993483 + \beta \cdot 0.968992 = 977719 \\ \dfrac{\alpha \cdot 0.993483 \cdot 0.25 + \beta \cdot 0.968992 \cdot 1}{977719} = 0.75 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 328044.29 \\ \beta = 672670.59 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 2</u>

Il signor Verdi intende valutare le seguenti posizioni finanziarie aleatorie:

$$X_1 = \begin{cases} 5000€ & \text{con probabilità } 0,53 \\ 12000€ & \text{con probabilità } 0,3 \\ 60000€ & \text{con probabilità } 0,17 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 100€ & \text{con probabilità } 0.97 \\ 190000€ & \text{con probabilità } 0.03 \end{cases}$$

e X_3 distribuita uniformemente nell'intervallo (0€, 41000€).

a) Supponendo che il signor Verdi abbia funzione di utilità

$$u(x) = 0,00003x^2 + x$$

si determini l'ordinamento delle sue scelte secondo il criterio dell'utilità attesa;

$$U(X_1) = \begin{cases} 0.00003 \cdot 5000^2 + 5000 & 0,53 \\ 0.00003 \cdot 12000^2 + 12000 & 0,3 \\ 0.00003 \cdot 60000^2 + 60000 & 0,17 \end{cases}$$

$$U(X_2) = \begin{cases} 0.00003 \cdot 100^2 + 100 & 0.97 \\ 0.00003 \cdot 190000^2 + 190000 & 0.03 \end{cases}$$

$$E(U(X_1)) = 36503.5$$
$$E(U(X_2)) = 38287.291$$
$$E(U(X_3)) = \int_a^b U(x)\cdot f(x)dx = \frac{1}{41000}\int_0^{41000} 0.00003x^2 + xdx =$$

Per calcolare l'utilità attesa dell'alternativa X_3 calcoliamo:

$$0.00003\int x^2 dx + \int xdx = 0.00003\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c\,.$$

Adesso poniamo $F(x) = 0.00003\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ e ritornando alla formula dell'integrale otteniamo:

$$\frac{1}{41000}\cdot[F(41000) - F(0)] = 37310$$

Confronto:

$E(U(X_2)) > E(U(X_3)) >\ E(U(X_1)) \quad \Rightarrow \quad X_2 \succ X_3 \succ X_1$

b) Nel caso in cui la funzione di utilità del signor Verdi fosse stata $z(x) = 3x^2 + 100000x + 50000$ **determinare, motivando opportunamente la risposta e senza effettuare nuovamente i calcoli, le preferenze del signor Verdi.**

Una delle proprietà della funzione di utilità u(x) è quella di essere invariante per trasformazioni lineari affini positive, nel senso che se u(x) rappresenta le preferenze del decisore, allora una sua trasformazione lineare affine v(x) del tipo:

$$v(x) = a \cdot u(x) + b \qquad \text{con } a > 0;$$

lascia invariate le preferenze del decisore.

Nel nostro caso v(x) è proprio una tale trasformazione di u(x) con a = 100000 e b = 50000, quindi giungiamo alla conclusione che le preferenze del signor Verdi sono esattamente uguali a quelle di prima.