MATEMATICA FINANZIARIA 2 – CdL EA
PROVA SCRITTA DEL **29 GENNAIO 2008**

ESERCIZIO 1

In un mercato ideale al tempo t=0 sono presenti quattro TCN con valore facciale 500 Euro, scadenza rispettivamente pari a 3, 4, 5, 6 semestri e prezzi pari rispettivamente a 448 Euro, 427 Euro, 416 Euro, 405 Euro. Nell'ipotesi che sul mercato non sia possibile realizzare arbitraggi non rischiosi, determinare:

1. **la struttura per scadenza dei prezzi a pronti e dei prezzi a termine sullo scadenziario $\underline{t}$={0,3,4,5,6} semestri;**

Per nostra comodità, dato che le formule sono espressi in anni, riconduciamo anche lo scadenzario in anni:

$$\{1.5, 2, 2.5, 3\}$$

$v(0, x_{1.5}) = 448$ $v(0, x_2) = 427$ $v(0, x_{2.5}) = 416$ $v(0, x_3) = 405$

S.P.S. PREZZI A PRONTI:

Calcoliamo la struttura per scadenza dei prezzi a pronti grazie al teorema di indipendenza dell'importo:

$$v(t, x_s) = x_s \cdot v(t, s)$$

$$v(0,1.5) = \frac{448}{500} = 0.896 \qquad v(0,2) = \frac{427}{500} = 0.854 \qquad v(0,2.5) = \frac{416}{500} = 0.832 \qquad v(0,3) = \frac{405}{500} = 0.81$$

S.P.S. PREZZI A TERMINE:

Calcoliamo la struttura per scadenza dei prezzi a termine grazie al teorema dei prezzi impliciti:

$$v(t, T, s) = \frac{v(t, s)}{v(t, T)}$$

$$v(0,0,1.5) = v(0,1.5) = 0.896 \qquad v(0,1.5,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1.5)} = 0.953125$$

$$v(0,2,2.5) = \frac{v(0,2.5)}{v(0,2)} = 0.974239 \qquad v(0,2.5,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2.5)} = 0.973558$$

Si ipotizzi che al tempo t=0 sia ora possibile negoziare un TCN con consegna al tempo t=8 trimestri, scadenza in t=5 semestri, valore nominale C=500 Euro e prezzo P=425 Euro. Dire se la compravendita di tale titolo consente la realizzazione di arbitraggi non rischiosi e, in caso affermativo, determinare:

2. **il profitto di arbitraggio e la strategia necessaria per realizzarlo.**

C = 500   P = 425   t = 0   T = 8 trimestri (2 anni)   s = 5 semestri (2.5 anni)

Il prezzo del TCNU a termine è pari a $v(0,2,2.5) = \frac{P}{C} = 0.85$

Il prezzo che non consente la realizzazione di arbitraggi è quello determinato secondo il teorema dei prezzi impliciti:

$$v(t,T,s) = \frac{v(t,s)}{v(t,T)}$$

$$v(0,2,2.5) = \frac{v(0,2.5)}{v(0,2)}$$

$0.85 \neq 0.974239 \quad \rightarrow \quad$ *Prezzo effettivo* $\neq$ *Prezzo teorico*

DUNQUE È POSSIBILE REALIZZARE ARBITRAGGI

<u>STRATEGIE DI ARBITRAGGIO</u>:

In t=0:

A) ACQUISTO UNA UNITÀ DI TCN A TERMINE-
B) ACQUISTO 425 UNITÀ DI TCNU A PRONTI CON SCADENZA 2
C) VENDO ALLO SCOPERTO 500 UNITÀ DI TCNU A PRONTI CON SCADENZA 2.5

	0	2	2.5
A		-425	500
B	-425·v(0,2)	425	
C	500·v(0,1)		-500
PROFITTO ARBITRAGGIO	**53.05**	0	0

ESERCIZIO 2

Un individuo deve far fronte ad una passività di 100000 Euro al tempo t=3 anni. A tal fine oggi si rivolge ad un mercato nel quale è possibile acquistare solo titoli a cedola nulla con scadenza rispettivamente pari a 2 e 4 anni e valore facciale rispettivamente pari a 1000 Euro e 4000 Euro. Determinare quante quote dei due TCN l'individuo deve acquistare affinché il portafoglio attivo cosi composto sia immunizzato da shift additivi di ampiezza aleatoria finita nell'ipotesi in cui la curva dei rendimenti sia caratterizzata da un tasso d'interesse costante pari al 3% su base annua.

TCN_A:
SCADENZA = 2 ANNI
C = 1000
$P = 1000 \cdot (1{,}03)^{-2} = 942.596$
D(0, TCN_A) = 2 anni

TCN_B:
SCADENZA = 4 ANNI
C = 4000
$P = 4000 \cdot (1{,}03)^{-4} = 3553.948$
D(0,TCN_B) = 4 anni

Se indichiamo la passività con il simbolo $\underline{y}$, allora:

$V(0, \underline{y}) = 100000 \cdot (1{,}03)^{-3} = 91514.17$

D(0, $\underline{y}$) = 3 anni

Impostiamo dunque le due condizioni del teorema di Fisher-Weill:

$$\begin{cases} V(0,\underline{X}) = V(0,\underline{Y}) \\ D(0,\underline{X}) = D(0,\underline{Y}) \end{cases}$$

Se indichiamo con α le quote del TCN_A e con β le quote del TCN_B, il sistema sarà il seguente:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 942.596 + \beta \cdot 3553.948 = 91514.17 \\ \dfrac{\alpha \cdot 942.596 \cdot 2 + \beta \cdot 3553.948 \cdot 4}{91514.17} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 48.544 \\ \beta = 12.875 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

Un individuo caratterizzato da un capitale certo C=1000 Euro, deve effettuare una scelta tra le seguenti operazioni finanziarie rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \begin{cases} 137 & \text{con probabilità } 0{,}5 \\ 250 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ -260 & \text{con probabilità } 0{,}2 \end{cases} \qquad G_2 = \begin{cases} -137 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ 323 & \text{con probabilità } 0{,}7 \end{cases}$$

G_3 con distribuzione uniforme sull'intervallo (-120, 300)

Definite le posizioni finanziarie $X_1=C+G_1$, $X_2=C+G_2$ e $X_3=C+G_3$, determinare l'ordinamento delle preferenze in base al criterio dell'utilità attesa qualora l'individuo sia caratterizzato da una funzione di utilità $u(x)=x-0.0001x^2$. Calcolare inoltre l'equivalente certo delle tre alternative di investimento.

$$X_1 = \begin{cases} 1137 & 0.5 \\ 1250 & 0.3 \\ 740 & 0.2 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 863 & 0.3 \\ 1323 & 0.7 \end{cases} \qquad X_3 \text{ uniforme in } (880,\ 1300)$$

$$U(X_1) = \begin{cases} 1137 - 0.0001 \cdot 1137^2 & 0.5 \\ 1250 - 0.0001 \cdot 1250^2 & 0.3 \\ 740 - 0.0001 \cdot 740^2 & 0.2 \end{cases} \qquad U(X_2) = \begin{cases} 863 - 0.0001 \cdot 863^2 & 0.3 \\ 1323 - 0.0001 \cdot 1323^2 & 0.7 \end{cases}$$

$$E(U(X_1)) = 969.0346$$
$$E(U(X_2)) = 1040.1339$$
$$E(U(X_3)) = \int_a^b U(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{420} \int_{880}^{1300} x - 0.0001x^2 dx =$$

INTEGRANDO:

$$\int x dx - 0.0001 \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} - 0.0001 \cdot \frac{x^3}{3}$$ che rappresenta F(X)

Ritornando alla formula dell’integrale otteniamo:

$$\frac{1}{420} \cdot [F(1300) - F(880)] = 969.72$$

Confronto:

$E(U(X_2)) > E(U(X_3)) > E(U(X_1)) \quad \Rightarrow \quad X_2 \succ X_3 \succ X_1$