MATEMATICA FINANZIARIA 2
PROVA SCRITTA DEL **10 FEBBRAIO 2009 - EA**

ESERCIZIO 1

Si consideri la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine, osservata su un mercato ideale al tempo t_0=0:

i(0;0,1)=2% ; i(0;1,3)=3% ; i(0;3,4)=3,5% ; i(0;4,5)=4% ; i(0;5,6)=3%.

in cui i tassi sono espressi su base annua ed i tempi sono misurati in quadrimestri. Determinare:

1. **la struttura per scadenza dei prezzi a termine e i corrispondenti prezzi dei TCNU a pronti;**
2. **la struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti, esprimendoli in forma percentuale e su base annua.**

Dalle note formule, la struttura per scadenza (S.P.S.) dei prezzi a termine è:

v(0;0,1)= 0,99342; v(0;1,3)= 0,98048; v(0;3,4)= 0,9886; v(0;4,5)= 0,98701; v(0;5,6)= 0,9902

mentre la S.P.S. dei prezzi a pronti è data da:

v(0,1)=v(0;0,1)=0,99342; v(0,3)= 0,97403; v(0,4)= 0,96293; v(0,5)= 0,95042; v(0,6)= 0,941105

La S.P.S. dei prezzi a pronti è data da:

i(0,1)=i(0;0,1)=2%; i(0,3)= 2,665%; i(0,4)=2,8736%; i(0,5)= 3,097%; i(0,6)= 3,0815%

in cui i tempi sono espressi su scala quadrimestrale ed i tassi sono su base annua (nel compito bisogna riportare i vari passaggi partendo dalle formule)

Dato il titolo a pronti <u>x</u>/<u>t</u>={-300€, 315€}/{0,2}, dove i tempi sono espressi su base annua, si stabilisca se è possibile realizzare arbitraggi non rischiosi tramite la compravendita di 15 unità del titolo <u>x</u> e di opportune quantità dei TCNU a pronti (determinati al punto 1), determinando, in caso affermativo, la relativa strategia ed il profitto di arbitraggio.

Il titolo **<u>x</u>/<u>t</u>** garantisce il pagamento di 315€ al tempo 2 anni (cioè 6 quadrimestri) a fronte del pagamento di un prezzo di 300€. Quindi tale titolo è un TCN non unitario, con valore nominale C=315€, il cui prezzo teorico, in base al teorema dell'indipendenza dell'importo è pari a:

(Prezzo Teorico =) 315*v(0,6)=315*0,941105=296,44<315 (= Prezzo di mercato)

Con 15 unità del titolo **<u>x</u>/<u>t</u>** è quindi possibile realizzare un arbitraggio tramite la seguente strategia:

A) In t=0 vendo allo scoperto 15 unità del titolo **<u>x</u>/<u>t</u>**, al prezzo 15*300=4500
B) In t=0 acquisto 4725 unità del TCNU con scadenza 6 quadrimestri

Tabella dei Pay-off

	t=0	T=6 quad
x/t	4500	-4725
TCNU(0,6)	-4446,72	4725
Profitto	***53,278***	0

Qualora l'azienda Gamma intendesse immunizzare una passività di 85.000€ all'epoca t=1 anno tramite l'acquisto al tempo t_0=0 dei TCNU a pronti disponibili sul mercato ideale con scadenza 4 mesi e 2 anni, determinare quante quote dei due TCNU dovrebbe acquistare affinché il portafoglio attivo cosi composto sia immunizzato da shift additivi di ampiezza aleatoria finita.

Dalle condizioni del teorema di Fisher-Weil è facile verificare che bisogna acquistare un portafoglio composto da 50004,84 TCNU con scadenza un quadrimestre e 35189,73 TCNU con scadenza 6 quadrimestri (nel compito bisogna riportare i vari passaggi partendo dalle formule).

ESERCIZIO 2

Il signor Rossi, che possiede un capitale certo C=20000 Euro, intende valutare un investimento semestrale, potendo scegliere le seguenti operazioni finanziarie rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \begin{cases} 800 & \text{con probabilità } 0{,}4 \\ 500 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ -200 & \text{con probabilità } 0{,}3 \end{cases} \qquad G_2 = \{240 \quad \text{con probabilita'1}$$

$G_3 \sim U(250,800)$ [distribuzione uniforme]

Avendo definite le posizioni finanziarie $X_1=C+G_1$, $X_2=C+G_2$ e $X_3=C+G_3$, che rappresentano la ricchezza futura del Sig. Rossi, determinare l'ordinamento delle preferenze :

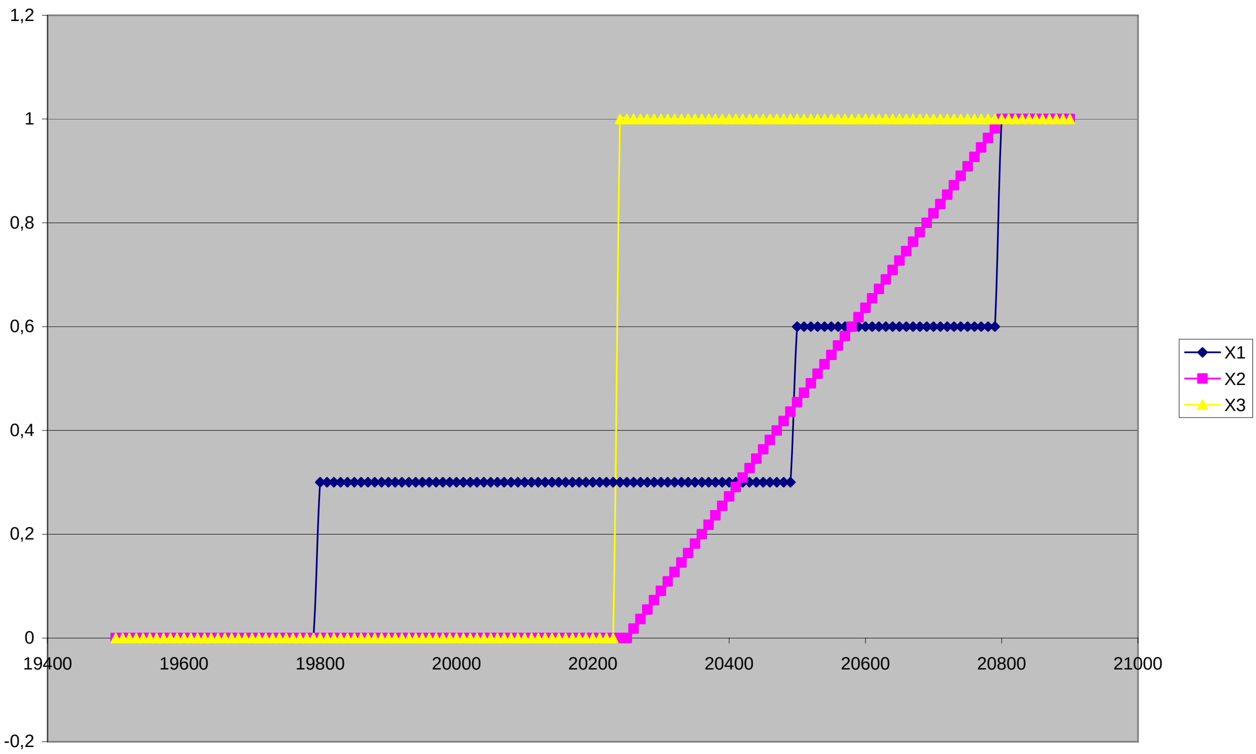
1. **in base al criterio della dominanza stocastica;**

Le posizioni finanziarie in termini di ricchezza futura sono date da:

$$X_1 = \begin{cases} 19800 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ 20500 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ 20800 & \text{con probabilità } 0{,}4 \end{cases} \qquad X_2 = \{20240 \quad \text{con probabilita'1}$$

$X_3 \sim U(20250,20800)$

E' immediato verificare, tramite il grafico delle funzioni di ripartizione delle tre variabili aleatorie, che X_1 con X_2 ed anche X_1 con X_3 non sono confrontabili secondo il criterio della dominanza stocastica, mentre X_2 e X_3 sono confrontabili e precisamente X_3 domina stocasticamente X_1.



2. **in base al criterio dell'utilità attesa, ipotizzando che il Sig. Rossi sia caratterizzato da una funzione di utilità *u(x)*=** $2\sqrt{x}+3\log x$ **Determinare inoltre il grado di avversione al rischio del Sig. Rossi al livello C=20000.**

In base al criterio dell'utilità attesa è immediato calcolare:

$E(U(X_1))=315{,}48 \;\; ; \;\; E(U(X_2))=314{,}28$

Per calcolare l'utilità attesa di X_3 notiamo che:

$$\int (2\sqrt{x}+3\log x)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int \log x dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3(x\log x - x) + c$$

E quindi, ponendo F(x)= $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3(x\log x - x)$, si ha che:

$E(U(X_3))=\dfrac{F(20800)-F(20250)}{20800-20250}=316{,}31$

Quindi in base al criterio dell'utilità attesa è: $X_3 \rangle X_1 \rangle X_2$

Per il grado di avversione al rischio calcoliamo l'indice di Arrow-Pratt. Essendo:

$$u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}; \qquad u''(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{3}{x^2};$$

si ha che u'(20000)=0,00722107 e u''(20000)=-0,000000184277

ed infine $r_a(20000) = -\dfrac{u''(20000)}{u'(20000)}$ =0,0000255193 >0

è il grado di avversione al rischio del Sig. Rossi al livello C=20000.