MATEMATICA FINANZIARIA 2
PROVA SCRITTA DEL **24 FEBBRAIO 2009**
ECONOMIA AZIENDALE

ESERCIZIO 1

In un mercato ideale, al tempo $t_0=0$, sono negoziati i seguenti TCN a termine con valore facciale 1000 Euro e prezzo rispettivamente pari a

V(0,0,1)=992 V(0,1,2)=987 V(0,2,3)=985 V(0,3,4)=979 V(0,4,5)=973

dove i tempi sono misurati in semestri. Si determini:

1. **La struttura per scadenza dei prezzi a termine e dei corrispondenti tassi esprimendoli in forma percentuale e su base annua;**
2. **La struttura per scadenza dei prezzi a pronti e dei corrispondenti tassi esprimendoli in forma percentuale e su base annua.**

Per prima cosa calcoliamo i prezzi dei TCNU a termine dividendo i prezzi dei TCN a termine per il valore nominale C=1000€

v(0,0,1)=0,992 ; v(0,1,2)=0,987; v(0,2,3)=0,985; v(0,3,4)=0,979; v(0,4,5)=0,973

Per i prezzi dei TCNU a pronti si ha: v(0,1)=v(0,0,1)=0,992;

per il teorema dei prezzi impliciti è v(0,1,2)=$\frac{v(0,2)}{v(0,1)}$ da cui v(0,2)=v(0,1,2)*v(0,1)=0,979104;

Ragionando in maniera analoga si ottengono i prezzi dei rimanenti TCNU:

v(0,3)=0,96441; v(0,4)=0,94416; v(0,5)=0,91867

Dalla struttura per scadenza dei prezzi è immediato calcolare le strutture per scadenza dei tassi:

i(0,0,1)=1,62% ; i(0,1,2)=2,652%; i(0,2,3)=3,069%; i(0,3,4)=4,336%; i(0,4,5)=5,627%

i(0,1)=1,62% ; i(0,2)=2,134%; i(0,3)=2,444%; i(0,4)=2,914%; i(0,5)=3,451%

(N.B.: Fornire nel compito i dettagli del calcolo partendo dalle formule)

Si supponga ora che sia anche possibile scambiare in questo mercato ideale i TCNU a pronti precedentemente determinati al punto 2. e si consideri un TCF emesso alla pari con valore facciale 1000 Euro, scadenza 2 anni, cedola semestrale e tasso nominale annuo del 3%. Si dica se la compravendita di tale TCF consente la realizzazione di arbitraggi non rischiosi e, in caso affermativo, si determini la strategia di arbitraggio ed il relativo profitto per una compravendita di 50 unità di TCF.

Il TCF ha cedola I=1000*0,03/2=15€. Il suo prezzo teorico, in base al teorema della linearità del prezzo è P_T=I*[v(0,1)+ v(0,2)+ v(0,3)+ v(0,4)]+1000*v(0,4)=1002,35>1000 (Prezzo di mercato)

Per attuare l'arbitraggio con 50 unità del TCF effettuiamo la seguente strategia. In t=0:

A) Compriamo 50 unità del TCF;
B) Vendiamo (allo scoperto) 750 unità del TCNU con scadenza un semestre;
C) Vendiamo (allo scoperto) 750 unità del TCNU con scadenza due semestri;
D) Vendiamo (allo scoperto) 750 unità del TCNU con scadenza tre semestri;
E) Vendiamo (allo scoperto) 50750 unità del TCNU con scadenza quattro semestri.

	0	1 Sem	2 Sem	3 Sem	4 Sem
TCF	-50000	750	750	750	50750
TCNU(0,1)	744	-750			
TCNU(0,2)	734,328		-750		
TCNU(0,3)	723,3131			-750	
TCNU(0,4)	47916,36				-50750
Profitto	**117,998**	**0**	**0**	**0**	**0**

Determinare, infine, le quote di TCNU con scadenza un anno e 2,5 anni da detenere in un portafoglio di attività al fine di immunizzare una passività di 10.000€ al tempo H=2 anni.

Quantità di TCNU con scadenza un anno: 3214,38
Quantità di TCNU con scadenza 2,5 anni: 6851,66
(N.B. nel compito bisogna impostare le condizioni del teorema di Fisher-Weil e risolvere il sistema)

ESERCIZIO 2

Un individuo caratterizzato da funzione di utilità

$$u(x) = 500\left(1 - e^{\frac{-x}{500}}\right)$$

vuole valutare due operazioni finanziarie caratterizzare rispettivamente dai guadagni aleatori

$$G_1 = \begin{cases} 1000 & \text{con probabilità } 0{,}3 \\ 400 & \text{con probabilità } 0{,}4 \\ 100 & \text{con probabilità } 0{,}3 \end{cases}$$

***G₂~U*(80,880) [distribuzione uniforme]**

Si determini l'ordinamento delle preferenze secondo il criterio dell'utilità attesa determinando altresì l'equivalente certo delle posizioni finanziarie G_1 e G_2.

E' immediato calcolare che $E[U(G_1)]=267{,}02$
Per il calcolo di $E[U(G_2)]$ procediamo nel seguente modo:

$$\int u(x)dx = \int 500\left(1 - e^{\frac{-x}{500}}\right)dx = 500\int dx - 500\int e^{\frac{-x}{500}}dx = 500x - 500\int e^{\frac{-x}{500}}dx$$

Dobbiamo ancora calcolare $\int e^{\frac{-x}{500}}dx$. Procediamo per sostituzione, ponendo $\frac{-x}{500} = t$ e, di conseguenza, $\frac{-dx}{500} = dt$ da cui $dx=-500dt$. Quindi:

$$\int e^{\frac{-x}{500}}dx = \int -500e^t dt = -500\int e^t dt = -500e^t + c = -500e^{\frac{-x}{500}} + c.$$

In definitiva $\int u(x)dx = 500x + 500^2 e^{\frac{-x}{500}} + c$.

Ponendo $F(x)= 500x + 500^2 e^{\frac{-x}{500}}$, si ha, per il teorema fondamentale dell'integrale:

$$E[U(G_2)] = \int_{80}^{880} u(x)dx = \frac{F(880) - F(80)}{880 - 80} = 287{,}46.$$

Concludendo possiamo affermare che, in base al criterio dell'utilità attesa, è $G_2>G_1$.

Per quanto riguarda l'equivalente certo, bisogna invertire la funzione di utilità, cioè risolvere l'equazione $y = 500\left(1 - e^{\frac{-x}{500}}\right)$ rispetto ad x. Con semplici passaggi algebrici si ha :

$$x = -500\log\left(1 - \frac{y}{500}\right)$$

e quindi, sostituendo ad y i valori delle utilità attese trovati in precedenza otteniamo gli equivalenti certi delle due alternative, dati rispettivamente da:

$$g_1^c = 381{,}83 \quad \text{e} \quad g_2^c = 427{,}76$$

Se l'individuo fosse caratterizzato da una funzione di utilità del tipo $u(x) = a - (a-2)e^{-x}$, è possibile determinare dei valori del parametro *a* affinché l'individuo sia propenso al rischio? (motivare opportunamente la risposta)

Si ha che $u'(x) = (a-2)e^{-x}$ e quindi, affinché $u(x)$ sia strettamente crescente deve valere la condizione

$$u'(x) > 0 \Leftrightarrow a > 2$$

Questo è il requisito affinché $u(x)$ possa essere utilizzata come una funzione di utilità!
Adesso consideriamo $u''(x) = -(a-2)e^{-x}$; L'indice di Arrow-Pratt è:

$$r_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-(a-2)e^{-x}}{(a-2)e^{-x}} = 1 > 0$$

Concludiamo che, per qualsiasi valore del parametro reale a, non è possibile che il decisore sia propenso al rischio (e neanche neutrale), dato che l'indice di Arrow-Pratt è sempre positivo.